GEOMETRÍA... ¡ SIN DUDAS !

PREGUNTAS Y RESPUESTAS BÁSICAS PARA SABER MÁS Y ENSEÑAR MEJOR

NP NUEVAS PROPUESTAS

CARLOS JESÉ

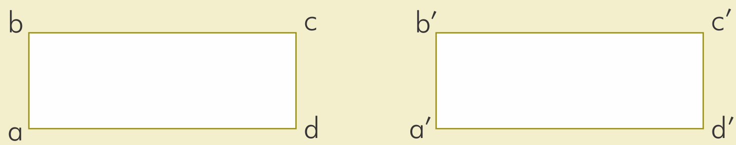
índice

CAPÍTULO 7

ÁREA DE FIGURAS POLIGONALES Y CIRCULARES

¿ Cuándo dos polígonos son congruentes, cuándo equivalentes y cuándo semejantes ?

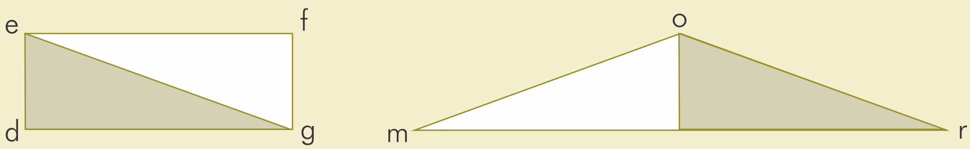
Dos o más polígonos son **congruentes** cuando tienen igual forma e igual superficie.



$\overset{\square}{abcd}$ y $\overset{\square}{a'b'c'd'}$ son congruentes

Se expresa : $\overset{\square}{abcd} \cong \overset{\square}{a'b'c'd'}$

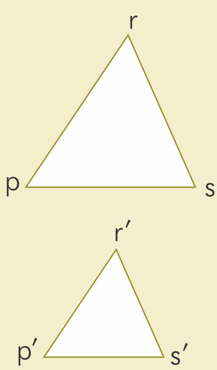
Dos o más polígonos son **equivalentes** cuando tienen distinta forma pero igual superficie.



$\overset{\square}{defg}$ y $\overset{\triangle}{mor}$ son equivalentes en superficie

Dos o más polígonos son **semejantes** cuando tienen igual forma pero distinta superficie. Se debe verificar que :

- Los ángulos correspondientes sean congruentes.
- Los lados correspondientes sean proporcionales.



$\hat{p} \cong \hat{p}' \qquad \hat{r} \cong \hat{r}' \qquad \hat{s} \cong \hat{s}'$

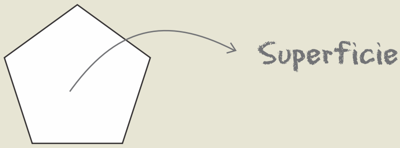
Ángulos correspondientes congruentes.

$$\frac{\overline{pr}}{\overline{p'r'}} = \frac{\overline{rs}}{\overline{r's'}} = \frac{\overline{sp}}{\overline{s'p'}}$$

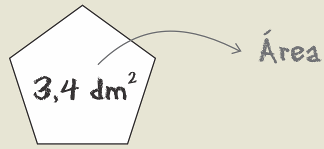
Lados correspondientes proporcionales.

$\overset{\triangle}{prs}$ y $\overset{\triangle}{p'r's'}$ son semejantes

¿ Cuál es la diferencia entre superficie y área ?



La superficie muestra un espacio interior, cuyos límites son los lados de la figura.

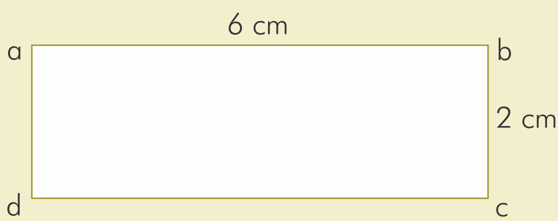


El área indica cuál es la medida de ese espacio o superficie.

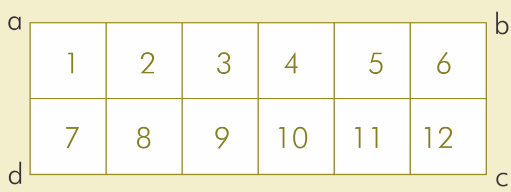
¿ Cómo se deduce la fórmula para hallar el área de triángulos y cuadriláteros ?

Todos los triángulos y cuadriláteros se relacionan con el rectángulo. De su fórmula para hallar el área se desprenden todas las otras. Por eso vamos a iniciar con esta figura geométrica.

Área del rectángulo



Necesitamos medir la superficie que ocupa el rectángulo **abcd**.



Comprobamos que se necesitan

12 ☐ de 1 cm^2

para cubrir toda su superficie.

Para conocer el área de cualquier rectángulo multiplicamos el largo por el ancho.

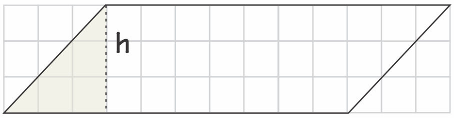
En los rectángulos el largo es la base y el ancho es la altura.

Área del ▭ abcd $= 6\ cm \cdot 2\ cm = 12\ cm^2$

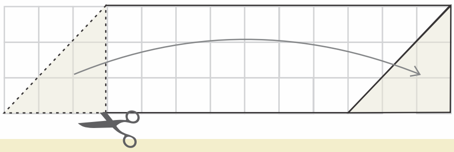
Área del rectángulo = b . h

Área del paralelogramo

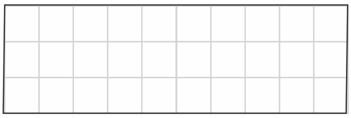
Dibujamos un paralelogramo y trazamos la altura (h).



Recortamos el triángulo gris y lo ubicamos en el lado opuesto.



Se forma un rectángulo cuya base y altura tienen la misma longitud que las del paralelogramo.



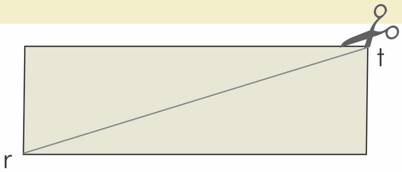
El paralelogramo original y el nuevo rectángulo tienen **superficies equivalentes**.

Para hallar el área de un paralelogramo utilizamos la misma fórmula que para hallar el área de un rectángulo.

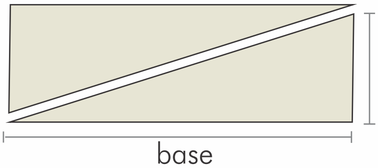
Área del paralelogramo = b . h

Área del triángulo

Construimos un rectángulo, trazamos la diagonal $\overline{rt}$ y cortamos.



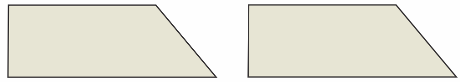
Queda dividido en dos triángulos congruentes cuya base y altura coinciden con la del rectángulo. Entonces la superficie del triángulo equivale a la superficie de la mitad del rectángulo.



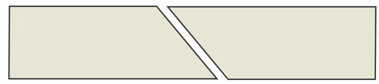
$$\textbf{Área del triángulo} = \frac{\textbf{Área del rectángulo}}{2} = \frac{b\ .\ h}{2}$$

Área del trapecio

Dibujamos dos trapecios congruentes.



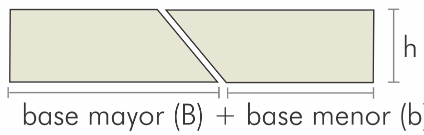
Colocamos uno al lado del otro, pero invirtiendo el segundo.
Obtenemos un rectángulo.



Vemos que :

$$\text{Superficie del trapecio} = \frac{\text{Superficie del rectángulo}}{2}$$

La altura del rectángulo coincide con la de los trapecios, y la base, con la suma de ambas bases del trapecio.



Podemos deducir la fórmula para hallar el área del trapecio.

$$\textbf{Área del trapecio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

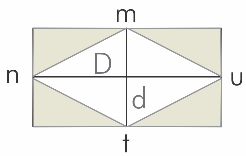
INFO

En el continente europeo las matemáticas no tuvieron un origen tan antiguo. Pasaron siglos sin figuras de renombre y sólo hubo éxitos notorios en la época del medioevo, especialmente en el renacimiento.

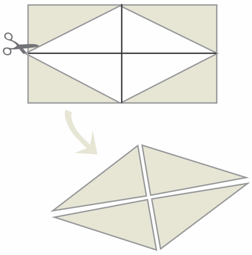
La obra de Fibonacci, "Prácticas geométricas", se toma como punto de partida de la geometría renacentista. Allí se resuelven problemas geométricos referidos sobre todo al área de polígonos y al volumen de diferentes cuerpos.

Área del rombo

Dibujamos un rectángulo y marcamos los ejes de simetría.



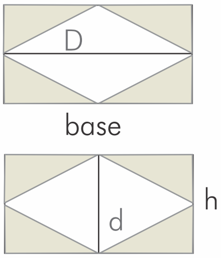
Unimos los puntos medios y formamos el rombo **mntu**. Quedan determinadas sus diagonales.



Si recortamos los cuatro triángulos coloreados podemos formar otro rombo congruente con el anterior.

$$\text{Área del rombo} = \frac{\text{Área del rectángulo}}{2}$$

$$\text{Área del rombo} = \frac{b \cdot h}{2}$$



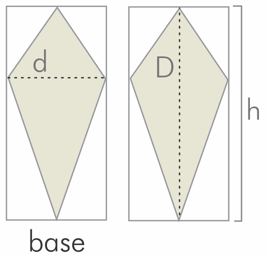
Como la base del rectángulo es congruente con la diagonal mayor (D),

y la altura del rectángulo es congruente con la diagonal menor (d),

podemos reemplazar . . .
la base por la diagonal mayor
y la altura por la diagonal menor.

$$\textbf{Área del rombo} = \frac{\mathbf{D \cdot d}}{\mathbf{2}}$$

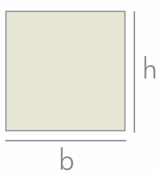
Área del romboide



La superficie del romboide ocupa la mitad de la superficie del rectángulo. Y al igual que en el rombo la diagonal mayor y la diagonal menor son congruentes con la altura y la base del rectángulo.

Área del romboide $= \dfrac{D \cdot d}{2}$

Área del cuadrado

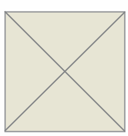


El cuadrado, por ser un rectángulo, responde a la fórmula general : $b \cdot h$

Pero como la **b** y la **h** son lados congruentes podemos simplificar la fórmula diciendo :

Área del $\square = \ell \cdot \ell$ o ℓ^2

Ahora bien : por ser un rombo también responde a la fórmula general de los rombos : $\dfrac{D \cdot d}{2}$



Y como las diagonales son congruentes lo expresamos así : Área del $\square = \dfrac{d^2}{2}$

Área del cuadrado $= \ell^2$ ó $\dfrac{d^2}{2}$

¿ Qué indica el teorema de Pitágoras ?

Pitágoras fue un sabio griego, discípulo de Tales de Mileto, que vivó en el siglo VI antes de Cristo. En su escuela fundada en Crotona, Italia, pudo demostrar, entre sus muchos aportes, la relación existente entre los lados de cualquier triángulo rectángulo.

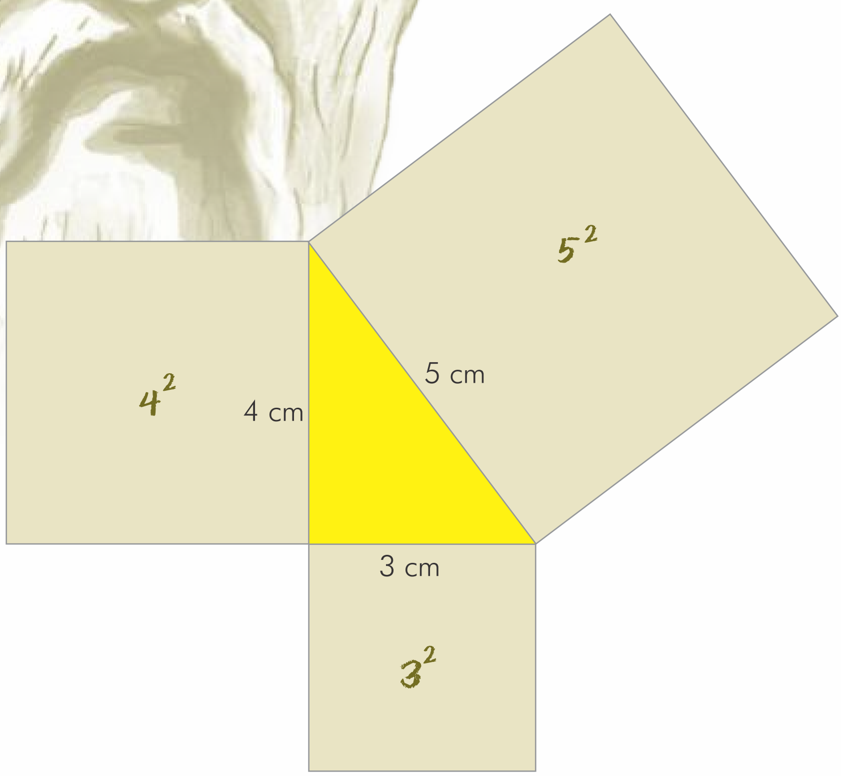
Vale aclarar que un teorema es una proposición que puede ser demostrada por medio de un conjunto de razonamientos que llevan invariablemente a la evidencia de la verdad de dicha proposición.

Pitágoras demostró que :

- En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

Para esa demostración construyó un triángulo rectángulo con estas medidas : 3 cm, 4 cm y 5 cm respectivamente.

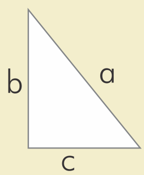
Sobre cada uno de los tres lados del triángulo construyó cuadrados, formando la siguiente figura :



Llegó así a la siguiente conclusión :

El cuadrado de los catetos	es igual	al cuadrado de la hipotenusa
$3^2 + 4^2$	$=$	5^2
$9 + 16$	$=$	25

Sabiendo, entonces, que en todo triángulo rectángulo . . .



$$a^2 = b^2 + c^2$$

. . . se puede conocer el valor faltante de un **cateto** o de la **hipotenusa** con una ecuación.

Cateto

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Hipotenusa

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

¿ Tiene utilidad práctica el descubrimiento de Pitágoras ?

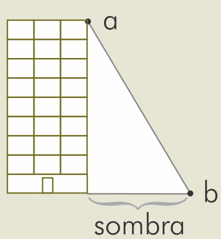
El teorema de Pitágoras tiene y tuvo innumerables aplicaciones prácticas.

Los egipcios ya conocían la relación entre la hipotenusa y los catetos y la empleaban de una manera práctica, aún antes de que Pitágoras desarrollara su teorema, tanto para la construcción de pirámides y templos como para la medición de tierras.

El pueblo Veda, en la India, usó los conocimientos pitagóricos para construir altares con formas geométricas, principalmente la del triángulo rectángulo.

También Galileo Galilei lo utilizó para determinar la medida de algunas montañas lunares.

En la vida cotidiana se aplica para calcular distancias en el plano, en los mapas y en la realidad. Así, se puede determinar la altura de un edificio conociendo la medida de la sombra que proyecta y la distancia del punto más alto del edificio al extremo de la sombra.



Sombra = 10 m

$\overline{ab} = 26$ m

¿ Cuál es la altura ?

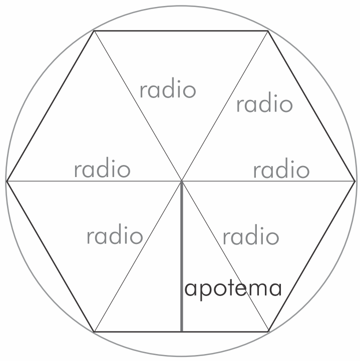
$$h = \sqrt{26^2 - 10^2}$$

$$h = \sqrt{576}$$

$$h = 24 \text{ m}$$

¿ Cuál es la fórmula para hallar el área de los polígonos regulares de más de cuatro lados ?

Analicemos paso a paso un polígono regular para comprender cómo surge la fórmula para calcular su área.



En este hexágono regular inscripto en la circunferencia se han trazado todos sus radios y una apotema.

El hexágono queda dividido en seis triángulos congruentes. Podemos decir que si sumamos el área de los seis triángulos obtenemos el área del hexágono.
Entonces :

Área del hexágono regular = 6 . área del triángulo

Área del hexágono regular $= 6 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$

Seguimos analizando :

La base de cada triángulo corresponde a un lado del polígono y la altura corresponde a la apotema.

En la fórmula podemos cambiar
- base por lado (ℓ)
- altura por apotema (ap)

Área del hexágono regular $= \frac{6 \cdot \ell \cdot ap}{2}$

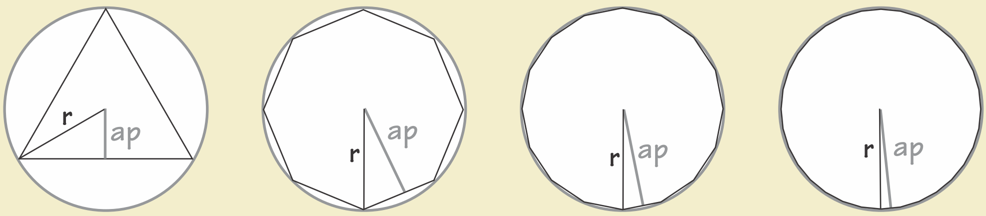
Y como **6 . lado = perímetro del hexágono** , podemos concluir que :

Área del hexágono regular $= \frac{P \cdot ap}{2}$

Esta fórmula se utiliza para hallar el área de cualquier polígono regular.

¿ Se relaciona el área de los polígonos regulares con el área del círculo ?

Sí, hay una estrecha relación. Veamos en una secuencia una serie de polígonos en los que va aumentando la cantidad de lados.



Cuantos más lados tiene un polígono más se parece a un círculo y la apotema se confunde cada vez más con el radio.

Entonces podemos ver al círculo como un polígono regular de muchos lados y utilizar la misma fórmula.

$$\text{Área del círculo} = \text{Área de polígonos regulares}$$

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{Perímetro . apotema}}{2}$$

Sabiendo que el perímetro del círculo es igual a la longitud de la circunferencia, reemplazamos :

$$\text{Área del círculo} = \frac{\text{Long de la circ . apotema}}{2}$$

$$\text{Área del círculo} = \frac{2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, \text{apotema}}{2}$$

Dado que en los polígonos regulares de infinitos lados el apotema se transforma en el radio, sustituimos en la fórmula :

$$\text{Área del círculo} = \frac{2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, r}{2}$$

Simplificamos :

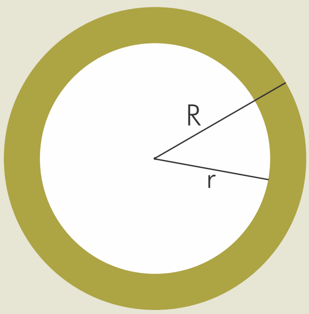
$$\frac{\cancel{2} \,.\, \pi \,.\, r \,.\, r}{\cancel{2}} = \pi \,.\, r^2$$

Área del círculo = π . r^2

¿ Cómo se obtiene el área de las figuras circulares ?

Las figuras circulares son :
- Corona circular
- Sector circular
- Segmento circular
- Trapecio circular.

Área de corona circular



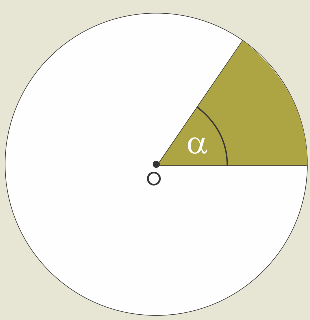
La corona circular es la porción del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas (mismo centro y distintos radios).

$$\boxed{\pi \, . \, R^2 - \pi \, . \, r^2}$$

R = radio mayor
r = radio menor

Área de la corona circular = π . ($R^2 - r^2$)

Área del sector circular



El sector circular es una porción del círculo y su área depende de la abertura del ángulo ($\hat{\alpha}$). A todo el círculo le corresponde un ángulo de 360° y al sector circular un ángulo central.
Se plantea una regla de tres simple directa.

360° ____ $\pi \, . \, r^2$ (área del círculo)

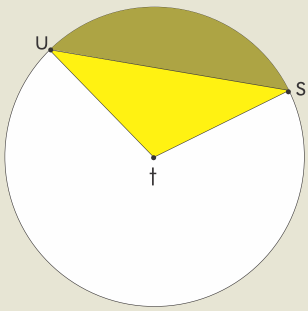
1° ____ $\dfrac{\pi \, . \, r^2}{360°}$

$\hat{\alpha}$ ____ $\dfrac{\pi \, . \, r^2 \, . \, \hat{\alpha}}{360°}$

Área del sector circular = $\dfrac{\pi \, . \, r^2 \, . \, \hat{\alpha}}{360°}$

Área del segmento circular

Para encontrar el área de un segmento circular se debe hallar el área del sector circular y luego restar el área del triángulo uts.



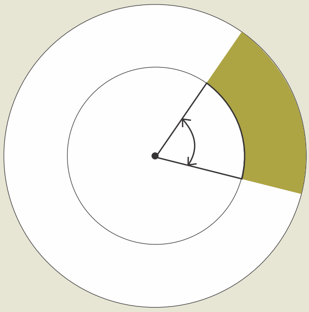
Área del segmento circular = área del sector circular - área de $\widehat{uts}$

$$\text{Área del segmento circular} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}}{360°} - \text{área del triángulo}$$

Área del trapecio circular

El trapecio circular comprende la parte de corona circular que pertenece al sector circular.

Por estar involucrado el sector circular y la corona circular incluye las dos fórmulas.

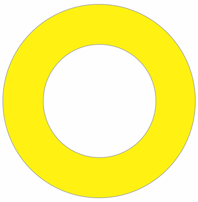


$$\text{Área del trapecio circular} = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{\alpha}}{360°}$$

Analicemos esta fórmula :

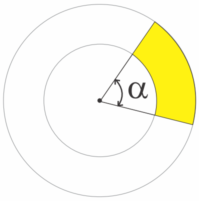
$\pi \cdot (R^2 - r^2)$

Indica el área de toda la corona circular.



Al multiplicar el área de la corona circular por : $\dfrac{\hat{\alpha}}{360°}$

Se obtiene sólo el área del trapecio circular.



¿ Se pueden aplicar ecuaciones en problemas de áreas ?

Sí. Se aplican para resolver múltiples situaciones problemáticas en las que se conoce la medida del área pero se desconoce el valor de la base, de un lado o de la altura.

Veamos dos ejemplos.

¿ Cuál será la longitud de la base de un triángulo isósceles en el que su altura es de 12 cm y su área de 132 cm^2 ?

$$\text{Área del triángulo} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$\text{base} = \frac{\text{área del triángulo} \cdot 2}{h}$$

$$\text{base} = \frac{\overset{22}{\cancel{132}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{6}{\cancel{12}}}}} = 22 \text{ cm}$$

La longitud de la base es de 22 cm.

Recordemos que :

Cuando se multiplican dos unidades de medidas de longitud iguales el resultado es una unidad de medida de superficie.	$cm. \ cm = cm^2$
Cuando se divide una unidad de medida de superficie con una misma unidad de medida de longitud el resultado es una unidad de medida de longitud.	$cm^2 : cm = cm$

Se necesita conocer el valor de la apotema de un hexaedro regular cuyo perímetro es 24 cm y el área 41,76 cm^2.

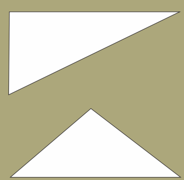
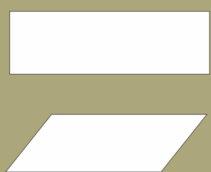
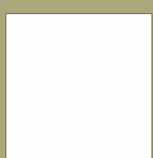
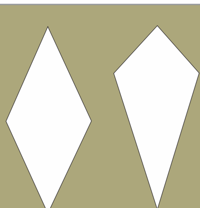
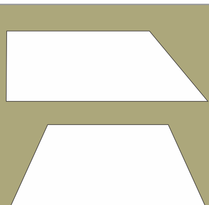
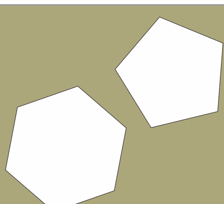
$$\text{Área del hexaedro} = \frac{P \cdot ap}{2}$$

$$ap = \frac{\text{área del hexaedro} \cdot 2}{P}$$

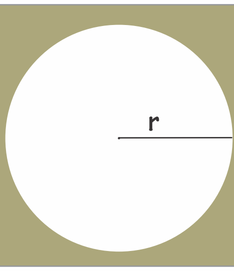
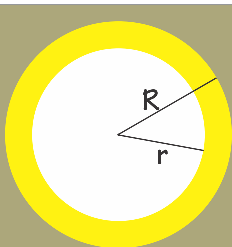
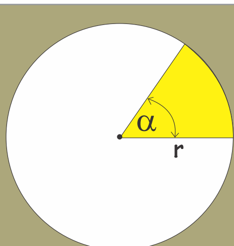
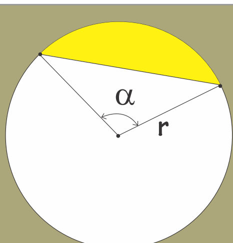
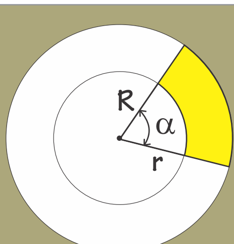
$$ap = \frac{\overset{3,48}{\cancel{41,76}} \cdot \overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{1}{\cancel{\underset{12}{\cancel{24}}}}} = 3,48 \text{ cm}$$

El valor del apotema es de 3,48 cm.

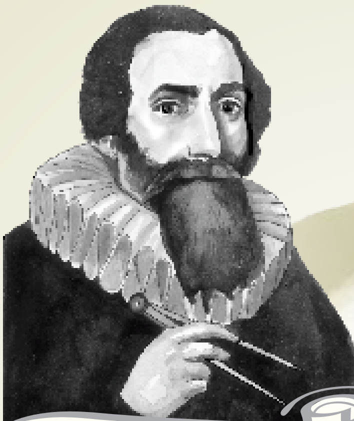
Resumen de fórmulas para hallar el área de figuras poligonales

Figura	Nombre	Fórmula para hallar el área	Fórmula para otras incógnitas
	Triángulo	$\frac{b \cdot h}{2}$	$b = \frac{\text{área} \cdot 2}{h}$ $h = \frac{\text{área} \cdot 2}{b}$
	Rectángulo y Paralelogramo propiamente dicho	$b \cdot h$	$b = \frac{\text{área}}{h}$ $h = \frac{\text{área}}{b}$
	Cuadrado	l^2 $\frac{d^2}{2}$	$l = \sqrt{\text{área}}$ $d = \sqrt{\text{área} \cdot 2}$
	Rombo y Romboide	$\frac{D \cdot d}{2}$	$D = \frac{\text{área} \cdot 2}{d}$ $d = \frac{\text{área} \cdot 2}{D}$
	Trapecio	$\frac{(B + b) \cdot h}{2}$	$B = \frac{\text{área} \cdot 2}{h} - b$ $b = \frac{\text{área} \cdot 2}{h} - B$ $h = \frac{\text{área} \cdot 2}{B + b}$
	Polígonos regulares de más de cuatro lados	$a = \frac{Per \cdot ap}{2}$	$P = \frac{\text{área} \cdot 2}{ap}$ $ap = \frac{\text{área} \cdot 2}{P}$

Resumen de fórmulas para hallar el área de figuras circulares

Figura	Nombre	Fórmula para hallar el área
	Círculo	$\pi \cdot r^2$
	Corona circular	$\pi \cdot (R^2 - r^2)$
	Sector circular	$\dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}}{360^0}$
	Segmento circular	$\dfrac{\pi \cdot r^2 \cdot \hat{\alpha}}{360^0}$ – área del triángulo
	Trapecio circular	$\dfrac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot \hat{\alpha}}{360^0}$

Un matemático notable



Johannes Kepler

Este grandioso astrónomo y matemático nació en Leonberg, Alemania, el 27 de diciembre de 1571.

En el campo de la astronomía publicó su notable libro titulado "**El misterio del Universo**" en el año 1596. Influenciado por Pitágoras, Kepler concibió al universo como un ser gobernado por relaciones geométricas. Así supuso que las distancias de los seis planetas (conocidos en ese momento) al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos. Enunció las tres leyes básicas que luego permitieron a Newton formular la ley de la gravitación.

1 - Los planetas tienen movimientos elípticos alrededor del Sol.

2 - Los planetas en su recorrido por la elipse barren áreas iguales en el mismo tiempo.

3 - El cuadrado de los períodos de los planetas es proporcional al cubo de la distancia media al Sol.

Estas tres leyes permitieron unificar, predecir y comprender todos los movimientos de los astros.

En 1601 ocupó el puesto de matemático en la Corte de Praga, reemplazando a Ticho Brahe.

En el campo matemático se le atribuye la creación del cálculo infinitesimal y el haber estimulado el uso de los logaritmos en los cálculos. Falleció el 15 de noviembre de 1630 en Rosensburg, Alemania.

Un mensaje para compartir

En el corazón de todos los inviernos
vive una primavera palpitante,
y detrás de cada noche,
viene una aurora sonriente.

Khalil Gibrán

Este libro pretende ser una guía didáctica para los docentes y para todos los que quieran enriquecer sus conocimientos, clarificar conceptos o aprender correctamente y "sin dudas" los principios básicos de la geometría.

Tiene como objetivos :

- Responder las preguntas esenciales de la geometría elemental.
- Estimular el uso de un lenguaje matemático preciso.
- Avanzar desde los conceptos simples hasta los temas más complejos que establecen los contenidos curriculares para la educación primaria.

Sus páginas se ven enriquecidas con biografías de matemáticos notables y con mensajes que invitan al lector a descubrir lo verdaderamente importante y trascendente.

En definitiva, un aporte para los que gusten abrirse a nuevos conocimientos y una ayuda para los que necesiten saber más para enseñar mejor.

ISBN 978-950-859-033-6
9 789508 590336