

ARITMÉTICA... ¡ SIN DUDAS !



**PREGUNTAS Y RESPUESTAS BÁSICAS
PARA SABER MÁS Y ENSEÑAR MEJOR**



NUEVAS PROPUESTAS

CARLOS JESÉ

Índice

CAPÍTULO 1**SISTEMAS DE NUMERACIÓN** 1**CAPÍTULO 2****OPERACIONES** 17**CAPÍTULO 3****MÚLTIPLOS y DIVISORES** 53**CAPÍTULO 4****NÚMEROS FRACCIONARIOS** 67**CAPÍTULO 5****NÚMEROS DECIMALES** 91**CAPÍTULO 6****PROPORCIONALIDAD** 107**CAPÍTULO 7****MEDIDAS** 137**CAPÍTULO 8****ESTADÍSTICA y PROBABILIDAD** 163**CAPÍTULO 9****NÚMEROS ENTEROS** 179

¿ Qué nombre reciben los integrantes de las 4 operaciones básicas ?

$$326 + 987 = 1313$$

Sumandos **Suma**

La operación se llama ADICIÓN.
La **suma** es el resultado.

$$2936 - 1715 = 1221$$

Minuendo **Sustraendo** **Resta**

La operación se llama SUSTRACCIÓN.
La **resta** es el resultado.

$$\begin{array}{r} 394 \\ \times 9 \\ \hline 3546 \end{array}$$

Factores

Producto

A los factores también se los llama **multiplicando** y **multiplicador**.

$$\begin{array}{r} \text{Dividendo } 680 \\ \text{Resto } 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 97 \text{ divisor} \\ \hline 7 \text{ Cociente} \end{array}$$

INFO

La adición fue la primera operación matemática utilizada por las diferentes culturas.

En América, los Incas realizaban sumas haciendo nudos en cuerdas de variados colores.

Pero fueron los Hindúes hacia el año 700 d .C. quienes desarrollaron con mayor eficacia tanto la adición como la sustracción.



¿ Se puede verificar si una operación se ha resuelto correctamente ?

Hay una prueba que garantiza un gran porcentaje de seguridad. Es decir que, si la prueba o verificación es correcta, hay muchas probabilidades de que la operación se haya resuelto bien.

Esta prueba se puede aplicar en la adición, multiplicación y división.

PRUEBA DE LA ADICIÓN

$$\begin{array}{r}
 18\ 160 \\
 +\ 9\ 325 \\
 \hline
 68\ 118 \\
 \hline
 95\ 603
 \end{array}$$

1 Se suman las cifras de cada sumando. Cuando la suma da 9 no se tiene en cuenta (como si fuese 0).

$$1^{\text{er}} \text{ sumando} \rightarrow 1 + \cancel{8} + \cancel{1} + 6 + 0 = 7$$

$$2^{\text{do}} \text{ sumando} \rightarrow \cancel{9} + 3 + 2 + 5 = 10 = 1$$

$$3^{\text{er}} \text{ sumando} \rightarrow 6 + \cancel{8} + \cancel{1} + \cancel{1} + \cancel{8} = 6$$

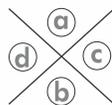
2 Luego se suman los parciales de cada sumando. $7 + 1 + 6 = 14 = 1 + 4 = 5$

3 Finalmente se suman las cifras del resultado. Si da 5 la operación se resolvió correctamente. $\cancel{9} + 5 + \cancel{6} + \cancel{0} + \cancel{3} = 5$

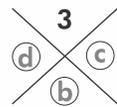
La práctica agiliza la mente y ayuda a revisar con rapidez cualquier adición.

PRUEBA DE LA MULTIPLICACIÓN

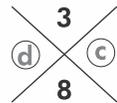
1 Se traza una cruz al lado de la operación.

$$\begin{array}{r}
 147 \\
 \times 8 \\
 \hline
 1176
 \end{array}$$


2 Se toma el primer factor o multiplicando y se suman sus cifras ($147 = 1 + 4 + 7 = 12$). Este resultado se transforma en un número de una cifra ($1 + 2 = 3$). Se lo coloca en la cruz en (a).



3 Se procede de la misma manera con el otro factor o multiplicador, (8) y se lo coloca en la cruz (b).



4 Se multiplican ambos factores y el resultado convertido en un número de una cifra se ubica en (c).

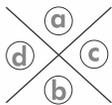


5 Por último se suman las cifras del producto o resultado: ($1 + 1 + 7 + 6 = 15$). Convertido en un número de una cifra se coloca en (d). Si (c) y (d) tienen el mismo número la multiplicación ha sido resuelta correctamente.

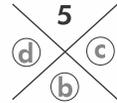


PRUEBA DE LA DIVISIÓN

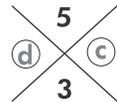
- 1 Se traza la cruz.

$$\begin{array}{r} 468 \overline{)5} \\ 18 \quad 93 \\ 3 \end{array}$$


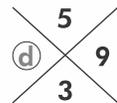
- 2 Se suman las cifras del divisor (en este caso no, porque es un número de una sola cifra) y el resultado se lo coloca en (a).



- 3 Se suman las cifras del cociente ($9 + 3 = 12$) y el resultado convertido en una cifra ($1 + 2 = 3$) se escribe en (b).



- 4 Ambas cifras se multiplican ($3 \times 5 = 15$) y si hay resto se suma ($15 + 3 = 18$). El número resultante ($1 + 8 = 9$) se coloca en (c).



- 5 Se completa con la suma de las cifras del dividendo : ($4 + 6 + 8 = 18$), cuyo resultado (9) se ubica en (d). Si (c) y (d) son iguales la operación está correctamente resuelta.

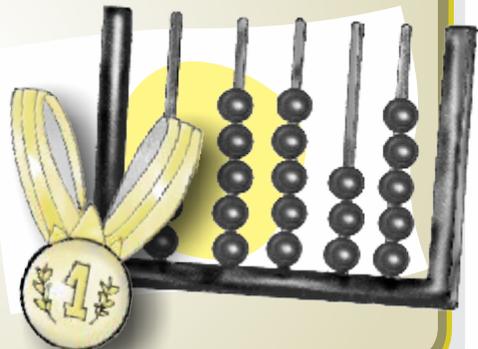


INFO

Una curiosa competencia de cálculo matemático se realizó en Tokio en el año 1946. Los competidores eran dos, un mecanógrafo del departamento financiero del ejército norteamericano y un oficial contable japonés. El primero utilizaba una calculadora eléctrica de 700 dólares y el segundo un ábaco de 25 centavos.

Debían resolver operaciones matemáticas de suma, resta, multiplicación y división con números de entre 3 y 12 cifras.

¿ El resultado ? Salvo en la multiplicación, el japonés con su ábaco triunfó en las demás pruebas incluyendo un final de procesos compuestos.



¿ Qué propiedades se cumplen en la adición ?

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$436 + 325 = 761$$

$$325 + 436 = 761$$

Se puede **conmutar** o cambiar el orden de los sumandos pues el resultado no varía.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$62 + 42 + 20 + 8 = 132$$

$$\underbrace{(62 + 42)}_{104} + \underbrace{(20 + 8)}_{28} = 132$$

$$62 + \underbrace{(42 + 20 + 8)}_{70} = 132$$

$$62 + \underbrace{(42 + 20)}_{62} + 8 = 132$$

Se pueden **agrupar** los sumandos de diferentes maneras y el resultado no cambia.

PROPIEDAD DISOCIATIVA

$$\begin{array}{ccccccc} 30 & + & 95 & + & 100 & = & 225 \\ \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\ 15 + 15 & + & 45 + 50 & + & 30 + 70 & = & 225 \end{array}$$

Se pueden **descomponer** los sumandos pues se obtiene el mismo resultado.

¿ Cómo se puede aplicar la propiedad asociativa para sumar con mayor rapidez ?

Muchas personas resuelven mentalmente sumas que en apariencia son bastante dificultosas. Se trata de individuos que, seguramente, han aprovechado i y muy bien! los beneficios de una adecuada asociación.

Asociar con inteligencia los números, permite resolver las sumas más complejas con mayor rapidez.

Al asociar se busca siempre aproximar a **10**, es decir, agrupar los números de manera que formen 10 o estén próximos a él.

$$\begin{array}{ccccccc} 9 + 1 & + & 3 + 7 & + & 8 & + & 6 + 4 = \\ \swarrow & & \swarrow & & & & \swarrow \\ 10 & + & 10 & + & 8 & + & 10 = 38 \end{array}$$

En cálculos de dos cifras, es importante agrupar formando **10, 20, 30...** o aproximar a éstos.

$$\begin{array}{c}
 30 \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 25 + 12 + 8 + 5 + 9 + 9 = \\
 \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad 20 \quad \quad \quad 18 \rightarrow \text{se aproxima a } 20 \\
 30 + 20 + 18 = 68
 \end{array}$$

Otra manera importante y que permite obtener rápidamente el resultado, es **asociar** buscando que los **números coincidan con una tabla determinada**.

$$\begin{array}{c}
 8 + 6 + 2 + 5 + 2 + 1 + 5 + 3 = \\
 8 + 8 + 8 + 8 = \\
 8 \times 4 = 32
 \end{array}$$

Según los números que aparezcan en un cálculo, ésta es la manera más eficaz.

$$\begin{array}{c}
 9 + 9 + 8 + 1 + 6 + 4 + 2 + 8 = \\
 \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad 9 \quad \quad \quad 10 \quad \quad \quad 10 \\
 (9 \times 3) + 10 + 10 = \\
 27 + 10 + 10 = 47
 \end{array}$$

Con la práctica se pueden asociar mentalmente, números que no estén próximos, en cálculos extensos.

$$\begin{array}{c}
 9 + 3 + 6 + 4 + 1 + 9 + 7 + 1 = \\
 \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad 10 \quad \quad \quad 10 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 10 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 10 \quad \quad \quad 10 \times 4 = 40
 \end{array}$$

¿ Cómo se obtiene . . .

. . . un sumando ausente ?	. . . el minuendo ausente ?	. . . el sustraendo ausente ?
Se suman los sumandos presentes y se le resta al resultado.	Se suman el sustraendo y el resultado.	Al minuendo se le resta el resultado.
$128 + \blacksquare + 96 + 15 = 345$ $128 + 96 + 15 = 239$ $345 - 239 = \mathbf{106}$	$\blacksquare - 236 = 408$ $236 + 408 = \mathbf{644}$	$912 - \blacksquare = 308$ $912 - 308 = \mathbf{604}$
El sumando ausente es 106 .	El minuendo ausente es 644 .	El sustraendo ausente es 604 .

¿ Cómo se resuelven cálculos en los que sólo hay adiciones y sustracciones ?

Sin paréntesis

$$350 - 95 - 32 + 108 - 115 + 74 =$$

Cuando un cálculo se presenta así, podemos resolver siguiendo el orden natural :

$$\begin{array}{r} 350 \\ - 95 \\ \hline 255 \end{array} \quad \begin{array}{r} 255 \\ - 32 \\ \hline 223 \end{array} \quad \begin{array}{r} 223 \\ + 108 \\ \hline 331 \end{array} \quad \begin{array}{r} 331 \\ - 115 \\ \hline 216 \end{array} \quad \begin{array}{r} 216 \\ + 74 \\ \hline 290 \end{array} \quad \text{Resultado final} = \mathbf{290}$$

Pero a veces se puede complicar la resolución.

Veamos el mismo cálculo, después de cambiar la ubicación de algunos números.

$$74 - 95 - 32 - 115 + 350 + 108 =$$

Si seguimos el orden natural habría que trabajar con números negativos.

En estos casos podemos resolverlo así : Sumamos los números con signo (+) y le restamos la suma de los números con signo (-).

$$\begin{array}{r} 350 - 95 - 32 + 108 - 115 + 74 \\ (350 + 108 + 74) - (95 + 32 + 115) \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 532 \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad 242 \qquad = \qquad 290 \end{array} \quad \text{¡ Llegamos al mismo resultado, } \mathbf{290} !$$

Con paréntesis

Se resuelven primero las operaciones que están entre paréntesis.

$$\begin{array}{r} 1\ 308 + (125 - 17) - (328 + 204) - 69 - 127 = \\ \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ 1\ 308 + 108 - 532 - 69 - 127 = 688 \end{array}$$

¿ Para qué se utilizan los signos de agrupamiento ?

El **paréntesis**, el **corchete** y la **llave** son los signos de agrupamiento. Se utilizan para reunir operaciones numéricas y para determinar el orden en el que deben ser resueltas.

En cualquier cálculo . . .

- . . . primero se resuelven las operaciones que están entre paréntesis ()
- . . . luego, las que están entre corchetes []
- . . . y por último las incluidas en las llaves { }

Este ejemplo muestra como varía el resultado al incluir un nuevo signo de agrupamiento.

$$200 - 24 - 9 - 8 - 6 + 3 = 156$$

$$200 - 24 - 9 - (8 - 6 + 3) = 162$$

$$200 - 24 - [9 - (8 - 6 + 3)] = 172$$

$$200 - \{24 - [9 - (8 - 6 + 3)]\} = 180$$

¿ Qué propiedades se cumplen en la multiplicación ?

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$14 \times 7 \times 3 = 294$$

$$7 \times 3 \times 14 = 294$$

$$3 \times 14 \times 7 = 294$$

Se puede conmutar o cambiar el orden de los factores y el resultado no varía.

PROPIEDAD ASOCIATIVA

$$9 \times 8 \times 12 = 864$$

$$\begin{array}{c} (9 \times 8) \times 12 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 72 \quad \times 12 = 864 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 9 \times (8 \times 12) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 9 \times 96 = 864 \end{array}$$

Los factores pueden ser asociados de diferentes maneras y el resultado no varía.

PROPIEDAD DISOCIATIVA

$$\begin{array}{c} 40 \quad \times \quad 69 \quad \times \quad 14 = 38\ 640 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ 10 \times 4 \quad \times \quad 23 \times 3 \quad \times \quad 2 \times 7 = 38\ 640 \end{array}$$

Es posible descomponer los factores pues se obtiene el mismo resultado.

¿ Cómo actúa el 0 en una multiplicación o en una división ?

El 0 como factor	El 0 como dividendo
$0 \cdot 4 = 0$ $14 \cdot 0 \cdot 8 = 0$ $0 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 = 0$ <p>Cuando el 0 ocupa el lugar de alguno de los factores, el resultado final SIEMPRE es 0.</p>	$0 : 8 = 0$ $0 : 21 = 0$ <p>Cuando el 0 se encuentra como dividendo el resultado de la división SIEMPRE es 0.</p>
<p><i>En ambos casos, el 0 actúa como elemento absorbente.</i></p>	

INFO

Para los Romanos la multiplicación resultaba una operación larga y complicada. Les llevaba tanto tiempo que dejaban a los esclavos la difícil tarea de realizarlas. Éstos habían aprendido a manejar el ÁBACO lo que les brindaba una gran ayuda.



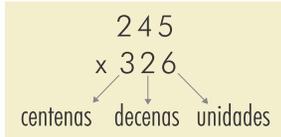
¿ Cómo se llega rápidamente al resultado cuando se multiplica o se divide por la unidad seguida de ceros ?

La unidad seguida de ceros . . .	
. . . como factor	. . . como divisor
$4 \cdot 100 = 400$ $328 \cdot 1\ 000 = 328\ 000$ $15 \cdot 1\ 000\ 000 = 15\ 000\ 000$ <p>Cuando se multiplica un número por la unidad seguida de ceros, se resuelve agregándole al multiplicando tantos ceros como tenga el multiplicador.</p>	$3\ 000 : 10 = 300$ $45\ 000 : 1\ 000 = 45$ $186\ 000\ 000 : 1\ 000\ 000 = 186$ <p>Cuando se divide un número por la unidad seguida de ceros, se le quitan al dividendo tantos ceros como tenga el divisor.</p>

¿ Por qué cuando se multiplican las cifras del multiplicador cada resultado parcial se ubica un lugar a la izquierda del anterior ?

Porque a cada cifra le corresponde una unidad de distinto orden.

Ejemplo :



Entonces cada resultado parcial debe ubicarse en la unidad correcta.

d de mil	u de mil	c	d	u	
		2	4	5	
		x 3	2	6	
	1	4	7	0	→ 245 · 6 u = 1 470 u
	4	9	0		→ 245 · 2 d = 490 d
7	3	5			→ 245 · 3 c = 735 c
7	9	8	7	0	

Producto final o resultado

¿ Cómo se obtiene en las multiplicaciones un factor, conociendo el otro factor y el producto ?

Se divide el producto por el factor conocido.

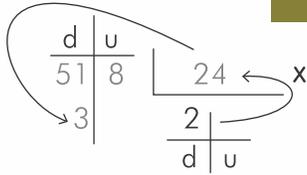
$\begin{array}{r} \square \\ \times 24 \\ \hline 2\ 352 \end{array}$	$2\ 352 : 24 = \mathbf{98}$	$\begin{array}{r} 76 \\ \times \square \\ \hline 3\ 420 \end{array}$	$3\ 420 : 76 = \mathbf{45}$
--	-----------------------------	--	-----------------------------

¿Cuál es el procedimiento en la operatoria de la división ?

Veamos tres ejemplos comunes de divisiones por 2 cifras y una posible explicación desarrollada en cuatro pasos.

Las dos primeras cifras del dividendo son mayores que el divisor.

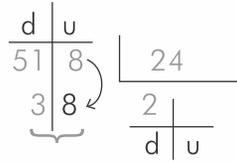
1



$51 \text{ d} : 24 = 2 \text{ d}$ porque ...
 $24 \cdot 2 = 48$ y sobran 3 d

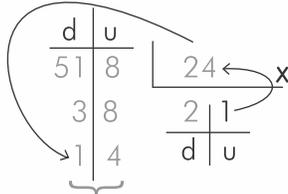
518 : 24

2



$3 \text{ d} = 30 \text{ u} + 8 \text{ u}$
 forman 38 u

3



Se repiten los pasos

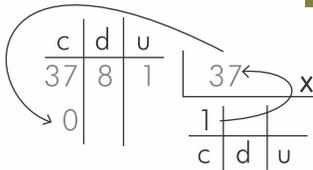
$38 \text{ u} : 24 = 1 \text{ u}$ porque ...
 $24 \cdot 1 = 24$ y sobran 14 u

Vemos entonces que :

$518 : 24 = 21$
 con resto 14

Las dos primeras cifras del dividendo son iguales que el divisor.

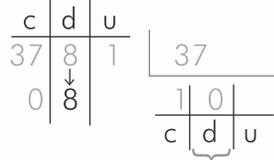
1



$37 \text{ c} : 37 = 1 \text{ c}$ porque ...
 $37 \cdot 1 = 37$ no sobra nada

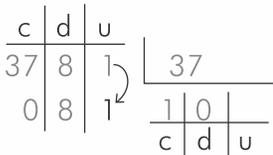
3 781 : 37

2

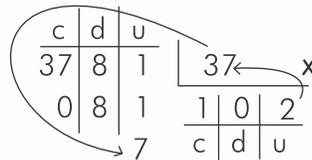


Tomamos ahora las **decenas**, es decir **8**. No nos alcanza para dividir. En el cociente colocamos 0 en el lugar de las decenas.

3



$8 \text{ d} = 80 \text{ u} + 1 \text{ u}$
 forman 81 u



Ahora sí $81 \text{ u} : 37 = 2 \text{ u}$ porque ...
 $37 \cdot 2 = 74$ y sobran 7 u

Entonces : $3781 : 37 = 102$
 con resto 7

Las dos primeras cifras del dividendo son menores que el divisor.

1

$$\begin{array}{r|l} \text{d} & \text{u} \\ 569 & 5 \end{array} \Bigg| 92$$

Las dos primeras cifras del dividendo no alcanzan para empezar la división.

Tomamos entonces las tres primeras.

$$5\ 695 : 92$$

$$\begin{array}{r|l} \text{d} & \text{u} \\ 569 & 5 \end{array} \Bigg| 92 \begin{array}{l} \leftarrow \text{x} \\ \hline 6 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \hline \text{d} \\ \hline \text{u} \end{array}$$

2

$$569 \text{ d} : 92 = 6 \text{ d} \text{ porque } \dots$$

$$92 \cdot 6 = 552 \text{ y sobran } 17 \text{ d}$$

3

$$\begin{array}{r|l} \text{d} & \text{u} \\ 569 & 5 \end{array} \Bigg| 92 \begin{array}{l} \leftarrow \\ \hline 6 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \hline \text{d} \\ \hline \text{u} \end{array}$$

$$17 \text{ d} = 170 \text{ u} + 5 \text{ u}$$

forman **175 u**

$$\begin{array}{r|l} \text{d} & \text{u} \\ 569 & 5 \end{array} \Bigg| 92 \begin{array}{l} \leftarrow \text{x} \\ \hline 6 \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \hline \text{d} \\ \hline \text{u} \end{array}$$

4

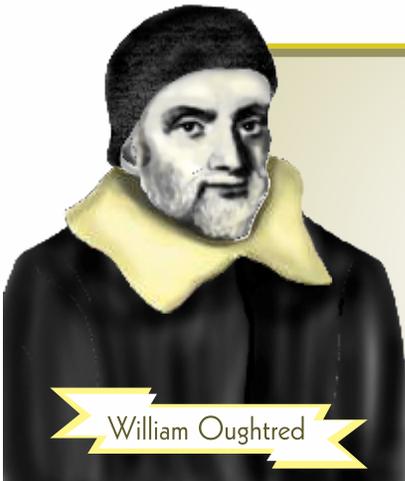
$$175 \text{ u} : 92 = 1 \text{ u} \text{ porque } \dots$$

$$92 \cdot 1 = 92 \text{ y sobran } 83 \text{ u}$$

$$\text{Entonces : } 5\ 695 : 92 = 61$$

con resto 83

Si se comprenden las divisiones sencillas no habrá dificultades luego para avanzar en otras más complejas.



William Oughtred

INFO

El signo de la multiplicación (**X**) fue usado por primera vez por el matemático inglés William Oughtred (1574 -1660). Casi simultáneamente apareció el signo de la división. Otro matemático, John Pell (1611-1685) utilizó el signo \div que luego se transformó en %.

Leibniz, con posterioridad, dejó los dos puntos (:) que perduran hasta hoy.

¿ Cómo se obtiene, en las divisiones . . .

. . . el dividendo conociendo el divisor, el cociente y el resto ?

$$\begin{array}{r} \blacksquare \quad | \quad 26 \\ 18 \quad 45 \end{array}$$

Se multiplica el **cociente** por el **divisor** y al resultado se le suma el **resto**.

$$\begin{aligned} 45 \cdot 26 + 18 &= \\ 1\,170 + 18 &= \mathbf{1\,188} \end{aligned}$$

. . . el divisor conociendo el dividendo, el cociente y el resto ?

$$\begin{array}{r} 6\,845 \quad | \quad \blacksquare \\ 14 \quad 69 \end{array}$$

Se le resta al **dividendo** el **resto** y al resultado se lo divide por el **cociente**.

$$\begin{aligned} (6\,845 - 14) : 69 &= \\ 6\,831 : 69 &= \mathbf{99} \end{aligned}$$

. . . el resto conociendo el dividendo, el divisor y el cociente ?

$$\begin{array}{r} 3\,715 \quad | \quad 86 \\ \blacksquare \quad 43 \end{array}$$

Se multiplican el **cociente** y el **divisor**. Y el resultado se resta al **dividendo**.

$$\begin{aligned} 3\,715 - (86 \cdot 43) &= \\ 3\,715 - 3\,698 &= \mathbf{17} \end{aligned}$$

INFO

Al pueblo Hindú se le atribuye la práctica metódica de dividir utilizando **dividendo**, **divisor** y **resto**.



¿ Siempre es distributiva la multiplicación con respecto a la adición y a la sustracción ?

¡ Siempre !

Propiedad distributiva en la multiplicación			
Con respecto a la adición		Con respecto a la sustracción	
$(\underbrace{7+3}) \cdot 4 =$ $10 \cdot 4 = 40$	$(7+3) \cdot 4 =$ $(\underbrace{7 \cdot 4}) + (\underbrace{3 \cdot 4}) =$ $28 + 12 = 40$	$(\underbrace{15-8}) \cdot 3 =$ $7 \cdot 3 = 21$	$(15-8) \cdot 3 =$ $(\underbrace{15 \cdot 3}) - (\underbrace{8 \cdot 3}) =$ $45 - 24 = 21$
$4 \cdot (\underbrace{7+3}) =$ $4 \cdot 10 = 40$	$4 \cdot (7+3) =$ $(\underbrace{4 \cdot 7}) + (\underbrace{4 \cdot 3}) =$ $28 + 12 = 40$	$3 \cdot (\underbrace{15-8}) =$ $3 \cdot 7 = 21$	$3 \cdot (15-8) =$ $(\underbrace{3 \cdot 15}) - (\underbrace{3 \cdot 8}) =$ $45 - 24 = 21$

¿ Es distributiva la división con respecto a la adición y a la sustracción ?

¡ No siempre ! Si la adición o la sustracción actúan como dividendo se puede aplicar la propiedad distributiva. Pero si actúan como divisor, ¡ NO !

Propiedad distributiva en la división			
Con respecto a la adición		Con respecto a la sustracción	
$(\underbrace{9+6}) : 3 =$ $15 : 3 = 5$	$(9+6) : 3 =$ $(\underbrace{9:3}) + (\underbrace{6:3}) =$ $3 + 2 = 5$	$(\underbrace{18-9}) : 3 =$ $9 : 3 = 3$	$(18-9) : 3 =$ $(\underbrace{18:3}) - (\underbrace{9:3}) =$ $6 - 3 = 3$
$3 : (\underbrace{9+6}) =$ $3 : 15 = \text{¿?}$	$3 : (9+6) =$ $(\underbrace{3:9}) + (\underbrace{3:6}) =$ $\text{¿?} + \text{¿?} = \text{¿?}$	$3 : (\underbrace{18-9}) =$ $3 : 9 = \text{¿?}$	$3 : (18-9) =$ $(\underbrace{3:18}) - (\underbrace{3:9}) =$ $\text{¿?} - \text{¿?} = \text{¿?}$

¿ Cómo se resuelven cálculos combinados que incluyen las cuatro operaciones ?

Sin paréntesis

- 1 - Se identifican los **términos**.

Los signos **+** y **-** separan términos.

$$35 + 36 : 4 - 3 \cdot 14 + 8 =$$

$$\underline{35} + \underline{36 : 4} - \underline{3 \cdot 14} + \underline{8} =$$

- 2 - Primero se resuelven las **multiplicaciones** y las **divisiones**.

$$\underline{35} + \frac{\underline{36 : 4}}{9} - \frac{\underline{3 \cdot 14}}{42} + \underline{8} =$$

- 3 - Finalmente, las **adiciones** y las **sustracciones**.

$$35 + 9 - 42 + 8 = 10$$

Con paréntesis

- 1 - Se resuelven primero las operaciones que están entre paréntesis.

$$2 \cdot (7 \cdot 42) - (115 : 5) - 33 =$$

$$2 \cdot \underline{(7 \cdot 42)} - \underline{(115 : 5)} - 33 =$$

$$2 \cdot 294 - 23 - 33 =$$

- 2 - Se sigue resolviendo como un cálculo sin paréntesis.

$$\underline{2 \cdot 294} - 23 - 33 =$$

$$588 - 23 - 33 = 532$$

¿ Qué significa “resolver un término” ?

Significa realizar todas las operaciones que éste incluya hasta que quede expresado en un **solo número**.

Ejemplos

$$\overbrace{32 \cdot 5 : 10 \cdot 2 : 8}^{1 \text{ solo término}} =$$

$$\underline{160} : 10 \cdot 2 : 8 =$$

$$\underline{16} \cdot 2 : 8 =$$

$$32 : 8 = 4$$

$$\overbrace{(8 + 2 \cdot 10) : (5 - 9 : 9)}^{1 \text{ solo término}} =$$

$$(8 + 20) : (5 - 1) =$$

$$28 : 4 = 7$$

¿ Cómo crear un cálculo combinado estableciendo previamente un resultado ?

Supongamos que se quiere crear un cálculo cuyo resultado sea **30**. Veamos distintas alternativas.

► Sólo con adiciones y sustracciones

Se comienza el cálculo con el número que se quiere obtener como resultado (en este caso **30**) y se agregan **adiciones y sustracciones**.

$$30 + 232 - 128 + 506 - 379 = 261$$

Partiendo del resultado obtenido se realiza el camino inverso cambiando los signos.

$$261 + 379 - 506 + 128 - 232 = 30$$

► Sólo con multiplicaciones y divisiones

Se comienza de la misma manera, es decir, con el número **30** y se agregan **multiplicaciones y divisiones**.

$$30 : 5 : 6 \cdot 8 \cdot 9 : 4 = 18$$

Partiendo del resultado obtenido se realiza el camino inverso cambiando los signos.

$$18 \cdot 4 : 9 : 8 \cdot 6 \cdot 5 = 30$$

► Con las cuatro operaciones

Se parte siempre del número señalado como resultado y se agregan **las cuatro operaciones**.

$$30 - 45 : 9 + 37 \cdot 5 + 48 - 176 = 82$$

Se realiza el camino inverso, pero sólo se cambian los signos que **separan términos**.

$$30 \overset{-}{-} 45 : 9 \overset{+}{+} 37 \cdot 5 \overset{+}{+} 48 \overset{-}{-} 176 = 82$$

← se vuelve invirtiendo signos

$$82 + 176 - 48 - 37 \cdot 5 + 45 : 9 = 30$$

¿ A qué se llama potencia de un número y cómo se expresa ?

La potenciación o potencia de un número es el producto de varios factores iguales.

En símbolos se expresa : $a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \dots}^{\text{"n" veces}}$

Exponente

Número que indica las veces que la base se multiplica por sí misma.

Valor de potencia

Resultado obtenido

Base

Número dado

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Con exponente 2
se lee "al cuadrado".

$$7^2 = \text{siete al cuadrado}$$

Con exponente 3
se lee "al cubo".

$$9^3 = \text{nueve al cubo}$$

Con otros . . .

$$5^0 = \text{cinco a la cero}$$

$$8^5 = \text{ocho a la quinta}$$

	Factor	Operación	Se expresa	
La potenciación es una multiplicación abreviada con la particularidad de que el factor es siempre el mismo.	7	7 . 7 . 7 . 7	7 ⁴	¡ A no confundir ! $3^7 \neq 3 \cdot 7$ ↓ ↓ 2 187 ≠ 21
	10	10 . 10 . 10	10 ³	
	4	4 . 4 . 4 . 4 . 4	4 ⁵	

¿Cuál es el resultado de un número con exponente cero ?

Cualquier número elevado a la potencia **0** da como resultado **1** , teniendo en cuenta que el número de la base debe ser distinto de **0** .

$$4^0 = 1$$

$$17^0 = 1$$

$$9^0 = 1$$

$$20^0 = 1$$

Veamos por qué

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

$$4^1 = 4$$

$$4^0 = 1$$

Diagrama de división por 4:

- 64 ÷ 4 = 16
- 16 ÷ 4 = 4
- 4 ÷ 4 = 1

¿ Es posible usar potencias en la descomposición de un número ?

Sí. Se justifica en los números de muchas cifras.

$$8\ 291\ 346 = (8 \cdot 1\ 000\ 000) + (2 \cdot 100\ 000) + (9 \cdot 10\ 000) + (1 \cdot 1\ 000) + (3 \cdot 100) + (4 \cdot 10) + 6$$

$$(8 \cdot 10^6) + (2 \cdot 10^5) + (9 \cdot 10^4) + (1 \cdot 10^3) + (3 \cdot 10^2) + (4 \cdot 10) + 6$$

Se llaman potencias de diez

- ← $10^8 = 100\ 000\ 000 \rightarrow 8$ ceros
- ← $10^4 = 10\ 000 \rightarrow 4$ ceros
- ← $10^7 = 10\ 000\ 000 \rightarrow 7$ ceros

INFO

Los Babilonios, pueblo dedicado principalmente al comercio, tuvieron gran facilidad para solucionar problemas aritméticos. Fueron precisos en el uso de la división y en el cálculo del cuadrado de los números. Pero la idea de usar exponentes para indicar la potencia a la que hay que elevar un número, como se realiza en la actualidad, corresponde a René Descartes.



¿ Se cumple la propiedad conmutativa en la potenciación ?

No. Y es importante recordar que para establecer que una operación no goza de determinada propiedad, basta encontrar un ejemplo donde dicha propiedad no se verifique.

Ejemplo: $8^2 = 64$ y $2^8 = 256$ $8^2 \neq 2^8$

En consecuencia en la potenciación no se cumple la propiedad conmutativa.

¿ Y se cumple la propiedad distributiva en la potenciación ?

Sólo se cumple en la **multiplicación** y en la **división**.
Veamos algunos ejemplos para comprobarlo.

ADICIÓN

CORRECTO $(7 + 3)^2$ INCORRECTO

$$(7 + 3)^2 =$$

$$10^2 = \mathbf{100}$$

$$(7 + 3)^2 =$$

$$7^2 + 3^2 =$$

$$49 + 9 = \mathbf{58}$$

La potenciación **no es distributiva** con respecto a la adición.

SUSTRACCIÓN

CORRECTO $(9 - 2)^3$ INCORRECTO

$$(9 - 2)^3 =$$

$$7^3 = \mathbf{343}$$

$$(9 - 2)^3 =$$

$$9^3 - 2^3 =$$

$$729 - 8 = \mathbf{721}$$

La potenciación **no es distributiva** con respecto a la sustracción.

MULTIPLICACIÓN

$(5 \cdot 4)^2$

$$(5 \cdot 4)^2 =$$

$$20^2 = \mathbf{400}$$

$$(5 \cdot 4)^2 =$$

$$5^2 \cdot 4^2 =$$

$$25 \cdot 16 = \mathbf{400}$$

La potenciación **es distributiva** con respecto a la multiplicación.

DIVISIÓN

$(21 : 7)^2$

$$(21 : 7)^2 =$$

$$3^2 = \mathbf{9}$$

$$(21 : 7)^2 =$$

$$21^2 : 7^2 =$$

$$441 : 49 = \mathbf{9}$$

La potenciación **es distributiva** con respecto a la división.

¿ Cómo se resuelve una multiplicación o una división de potencias de igual base ?

Se puede resolver de dos maneras.

Multiplicación

$$4^2 \cdot 4^3$$

$$(4 \cdot 4) \cdot (4 \cdot 4 \cdot 4)$$

$$16 \cdot 64 = 1\ 024$$

$$4^2 \cdot 4^3$$

$$4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3} = 4^5 = 1\ 024$$

El producto de dos o más potencias de igual base puede obtenerse elevando la **base** a la **suma** de los **exponentes dados**.

División

$$3^4 : 3^2$$

$$(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) : (3 \cdot 3)$$

$$81 : 9 = 9$$

Se puede simplificar previamente.

$$\frac{3^4}{3^2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3^2 = 9$$

$$3^4 : 3^2$$

$$3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2 = 9$$

El cociente de dos potencias de igual base puede obtenerse elevando la **base** a la **diferencia** de los **exponentes dados**.

¿ Cómo se obtiene la potencia de otra potencia ?

Se hace paso a paso :

$$(3 \cdot 3)^3 =$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$3^6 = 729$$

$$(3^2)^3$$

○ se multiplican los exponentes.

$$3^{2 \times 3} = 3^6 = 729$$

La potencia de una potencia es otra potencia de la misma base, cuyo exponente es igual al producto de los exponentes dados.

¿ Qué es la radicación y cuáles son sus componentes ?

La radicación es la operación inversa a la potenciación.

Índice

Indica la cantidad de veces que se debe multiplicar la raíz para obtener el radicando.

Signo radical

Contiene al radicando y al índice.

Radicando

Número del que se debe obtener la raíz.

Raíz

Resultado de la operación.

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

Todas las raíces tienen un índice, aunque el índice **2** no se coloca.

~~$$\sqrt[2]{16}$$~~

NO

$$\sqrt{16}$$

SÍ

→ Se lee raíz cuadrada de 16.

En todas las demás raíces se coloca el **índice**.

$$\sqrt[3]{8}$$

→ Se lee raíz cúbica de 8.

$$\sqrt[4]{81}$$

→ Se lee raíz cuarta de 81.

¿ Qué pasos se siguen para determinar una raíz ?

$$\sqrt[3]{27}$$

Se busca un número que multiplicado 3 veces por sí mismo dé 27.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \quad \text{Entonces } \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$$

$$\sqrt[5]{32}$$

Se busca un número que multiplicado 5 veces por sí mismo dé 32.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32 \quad \text{Entonces } \sqrt[5]{32} = \mathbf{2}$$

¿ Siempre la raíz o resultado es un número natural ?

No. En los primeros 100 números hay 10 raíces cuadradas perfectas y sólo 4 raíces cúbicas.

A saber :

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$
$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$		
$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{64} = 4$

¿ Es conmutativa la radicación ?

No, pues si se cambia el **índice** con el **radicando** no se obtiene el mismo resultado.

$$\sqrt[4]{256} \neq \sqrt[256]{4}$$

INFO

Los Hindúes fueron los primeros en extraer la raíz cuadrada y la raíz cúbica mediante el uso de reglas.

Un destacado matemático de esa cultura fue Aryabhata, que nació en el año 476 y fue capaz de extraer raíces cuadradas y cúbicas empleando un método como el que se usa en la actualidad.



¿ Se puede aplicar la propiedad distributiva en la radicación ?

Sólo en dos operaciones : la multiplicación y la división.
Veamos algunos ejemplos.

Se puede multiplicar y luego buscar la raíz.

$$\sqrt{324} = 18$$

$$\sqrt{9 \cdot 36}$$

○ se puede distribuir la raíz en ambos factores y después resolver.

$$\begin{aligned} \sqrt{9} \cdot \sqrt{36} &= \\ 3 \cdot 6 &= 18 \end{aligned}$$

$$\sqrt{9 \cdot 36} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{36}$$

La radicación es distributiva con respecto a la multiplicación.

Se puede dividir y luego buscar la raíz.

$$\sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt{64 : 4}$$

○ se puede buscar ambas raíces y después calcular el cociente.

$$\begin{aligned} \sqrt{64} : \sqrt{4} &= \\ 8 : 2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\sqrt{64 : 4} = \sqrt{64} : \sqrt{4}$$

La radicación es distributiva con respecto a la división.

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{16 + 9}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{16} + \sqrt{9} &= \\ 4 + 3 &= 7 \end{aligned}$$

Correcto

Incorrecto

$$\sqrt{16 + 9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

La radicación no es distributiva con respecto a la adición.

$$\sqrt{64} = 8$$

$$\sqrt{100 - 36}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{100} - \sqrt{36} &= \\ 10 - 6 &= 4 \end{aligned}$$

Correcto

Incorrecto

$$\sqrt{100 - 36} \neq \sqrt{100} - \sqrt{36}$$

La radicación no es distributiva con respecto a la sustracción.

¿ Cómo se resuelve un cálculo combinado en el que intervienen las cuatro operaciones básicas, potencias y raíces?

Sin signos de agrupamiento

$$7 \cdot 4 - 2^2 + \sqrt{16} + 8 \cdot 6 =$$

- Se identifican los términos teniendo en cuenta los signos (+) y (-), que son los que los separan.

- Se resuelven las operaciones en este orden :

- 1 - Las potencias y raíces.
- 2 - Las multiplicaciones y divisiones.
- 3 - Las adiciones y sustracciones.

Cuatro términos

$$\begin{array}{ccccccc} & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown \\ & & & & & & & \\ 7 \cdot 4 & \ominus & 2^2 & \oplus & \sqrt{16} & \oplus & 8 \cdot 6 & = \\ 7 \cdot 4 & - & 4 & + & 4 & + & 8 \cdot 6 & = \\ 28 & - & 4 & + & 4 & + & 48 & = \\ & & & & & & & \mathbf{76} \end{array}$$

Con signos de agrupamiento

$$\sqrt[3]{125} \cdot 2 + (32 \cdot 4 + 6) - (3 + \sqrt{25} + \sqrt{100}) =$$

- Se identifican los términos teniendo en cuenta los signos (+) y (-) que están fuera de los signos de agrupamiento.

- Se resuelven primero las operaciones que encierran los paréntesis.

- Cuando ya no quedan signos de agrupamiento se resuelve como ya vimos.

Tres términos

$$\begin{array}{ccccccc} & \diagup & & \diagdown & & \diagup & & \diagdown \\ & & & & & & & \\ \sqrt[3]{125} \cdot 2 & \oplus & (32 \cdot 4 + 6) & \ominus & (3 + \sqrt{25} + \sqrt{100}) & = \\ \sqrt[3]{125} \cdot 2 & + & (128 + 6) & - & (3 + 5 + 10) & = \\ \sqrt[3]{125} \cdot 2 & + & 134 & - & 18 & = \\ 5 \cdot 2 & + & 134 & - & 18 & = \\ 10 & + & 134 & - & 18 & = \\ & & & & & \mathbf{126} \end{array}$$

Si un cálculo combinado tiene diferentes signos de agrupamiento, primero se resuelven los paréntesis, luego los corchetes y finalmente las llaves.

¿ Qué pasos se deben seguir para resolver cálculos que incluyan varias operaciones dentro de un signo de agrupamiento ?

Los pasos son los ya enumerados, es decir, se resuelven :

- 1- las potencias y raíces
- 2- las multiplicaciones y divisiones
- 3- las adiciones y sustracciones.

$$\begin{aligned}
 \text{Ejemplo : } & 4 + (\sqrt{49} \cdot \sqrt{4} - 7^3 : 49 + 9 - 7) : 3 = \\
 & 4 + (\underbrace{7 \cdot 2} - \underbrace{343 : 49} + 9 - 7) : 3 = \\
 & 4 + (\underbrace{14 - 7 + 9 - 7}) : 3 = \\
 & 4 + \underbrace{9} : 3 = \\
 & 4 + 3 = 7
 \end{aligned}$$

¿ Qué diferencia hay entre lenguaje coloquial y lenguaje simbólico ?

Lenguaje coloquial

La cuarta parte de 28 es menor que la tercera parte de 27.

Producto entre el cubo de 5 y el cuadrado de 10.

El doble de la suma entre la raíz cúbica de 1 000 y el anterior de 11.

El lenguaje coloquial es utilizado por la matemática para expresar con palabras diferentes operaciones o para plantear múltiples situaciones problemáticas.

Lenguaje simbólico

$$28 : 4 < 27 : 3$$

$$5^3 \cdot 10^2$$

$$2 \cdot (\sqrt[3]{1000} + 11)$$

El lenguaje simbólico tiene mayor relevancia en este área pues está compuesto por signos, números y operaciones.

¿ Cómo se pasa del lenguaje coloquial al lenguaje simbólico ?

Cada expresión del lenguaje coloquial tiene su correspondencia en el lenguaje simbólico y viceversa.

Lenguaje coloquial

El doble de 7 menos 4 unidades, es mayor que el triple de 3.

Lenguaje simbólico

El doble de 7	$2 \cdot 7$
menos 4 unidades	$(2 \cdot 7) - 4$
es mayor que	$(2 \cdot 7) - 4 >$
el triple de 3	$(2 \cdot 7) - 4 > 3 \cdot 3$

Lenguaje simbólico

$$\sqrt{64} - \sqrt{49} < \sqrt{4}$$

Lenguaje coloquial

La diferencia entre la raíz cuadrada de 64 y la raíz cuadrada de 49 es menor que la raíz cuadrada de 4

¿ Cómo se expresa en el lenguaje simbólico, el valor de un número que se desconoce ?

Se lo representa con **cualquier letra**, aunque por costumbre se utiliza más la letra **X**.

Ejemplo :

Lenguaje coloquial

A la raíz cuadrada de un número desconocido se le resta el doble de 3 .

Lenguaje simbólico

A la raíz cuadrada	$\sqrt{\quad}$
de un número desconocido	\sqrt{X}
se le resta	$\sqrt{X} -$
el doble de 3	$\sqrt{X} - 2 \cdot 3$

¿ A toda expresión en el lenguaje coloquial le corresponde una sola expresión en el lenguaje simbólico ?

Sí, sólo una. Veamos tres ejemplos y destaquemos en cada uno la expresión simbólica correcta.

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico		
La raíz cuadrada del doble de un número	$\sqrt{2x}$	\sqrt{x}	$2x^2$
El anterior de la tercera parte de un número	$x \cdot 3 - 1$	$x : 3 - 1$	$x : 3 + 1$
La mitad de la raíz cúbica de un número	$\sqrt{x} : 2$	$\sqrt[3]{x} - 2$	$\sqrt[3]{x} : 2$

*Atención: $2x$ es igual a $2 \cdot x$

¿ Qué es una igualdad ?

Una **igualdad** es una expresión que indica que una cantidad es igual que otra.

$$\begin{array}{ccc} \text{1er.} & & \text{2do.} \\ \text{miembro} & & \text{miembro} \\ \hline 9 + 5 & = & 8 + 6 \\ \hline 14 & = & 14 \end{array}$$

Toda igualdad está formada por DOS MIEMBROS.

¿ Qué ocurre cuando en una igualdad se desconoce el valor de un número en alguno de sus miembros ?

En esos casos estamos en presencia de una **ecuación**.

Ya vimos que el número desconocido, llamado incógnita, puede representarse con cualquier letra.

Ejemplos: $x - 9 = 28$ $2^2 + 7 = t - 3$ $\sqrt{m} \cdot 2 = 10$

Una ecuación . . .

... es una igualdad

$$x - 9 = 28$$

entre dos miembros

$$x - 9 = 28$$

en la que hay que descubrir el valor de la incógnita.

$$x - 9 = 28$$

¿ Cuáles son los pasos a seguir para resolver una ecuación ?

1 Se despeja la incógnita, es decir, que se la deja sola en un miembro.

$$X + 32 - 14 = 51$$

2 Los números que acompañan a la incógnita pasan al otro miembro con la operación inversa.

$$X = 51 - 32 + 14$$

$$X = 33$$

3 Se reemplaza la incógnita por el resultado obtenido.

Verificamos reemplazando la incógnita por su valor.

$$33 + 32 - 14 = 51$$

$$51 = 51$$

4 Se verifica si se cumple la igualdad.

INFO

DIOFANTO DE ALEJANDRÍA

Matemático griego que se destacó en Alejandría alrededor del año 275 y fue considerado el más grande algebrista griego.

Resolvió problemas con ecuaciones algebraicas e inventó un formulismo particular.

Su principal obra es la "ARITHMETICA" dedicada casi con exclusividad a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas.



¿ Cómo se resuelve cuando en la igualdad hay más de un término ?

Siempre se separa en términos y luego se resuelve. Veamos distintas igualdades con diferentes dificultades y con la incógnita ubicada en uno o en otro miembro.

Incógnita seguida del signo +

$$X + 25 - \underline{32 : 4} = 32$$

$$X + 25 - 8 = 32$$

$$X = 32 - 25 + 8$$

$$X = 15$$

Verificamos.

$$\begin{aligned} 15 + 25 - 32 : 4 &= 32 \\ 32 &= 32 \end{aligned}$$

Incógnita seguida del signo -

$$45 - \underline{3 \cdot 2} = X - \sqrt{16} + 3^3 : 9$$

$$\underline{45 - 6} = X - 4 + \underline{27 : 9}$$

$$39 = X - 4 + 3$$

$$39 + 4 - 3 = X$$

$$40 = X$$

Verificamos.

$$\begin{aligned} 45 - 3 \cdot 2 &= 40 - \sqrt{16} + 3^3 : 9 \\ 39 &= 39 \end{aligned}$$

Incógnita seguida del signo •

$$X \cdot 4 - \underline{40 \cdot 2} = \underline{66 : 11} + \sqrt[3]{8}$$

$$X \cdot 4 - 80 = 6 + 2$$

$$X \cdot 4 - 80 = 8$$

$$X \cdot 4 = 8 + 80$$

$$X \cdot 4 = 88$$

Incógnita seguida del signo :

$$X : \sqrt{4} - 3^4 \cdot 2 = \underline{140 : 20} + \underline{15 : 3}$$

$$X : 2 - \underline{81 \cdot 2} = 7 + 5$$

$$X : 2 - 162 = 12$$

$$X : 2 = 12 + 162$$

$$X : 2 = 174$$

Quando la incógnita esta en un miembro acompañada por una multiplicación ($X \cdot 4$) o una división ($X : 2$), se resuelve en el último paso.

Ahora despejamos X.

$$X = 88 : 4$$

$$X = 22$$

Verificamos.

$$\begin{aligned} 22 \cdot 4 - 40 \cdot 2 &= 66 : 11 + \sqrt[3]{8} \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

$$X = 174 \cdot 2$$

$$X = 348$$

Verificamos.

$$\begin{aligned} 348 : \sqrt{4} - 3^4 \cdot 2 &= 140 : 20 + 15 : 3 \\ 12 &= 12 \end{aligned}$$

¿ Qué pasos se siguen cuando la incógnita se presenta en ambos miembros ?

$$3X + 5^2 = 13 \cdot 3 + X$$

1 - Se agrupan las incógnitas en un solo miembro.

$$3X - X = 13 \cdot 3 - 5^2$$

$$2X = 39 - 25$$

$$2X = 14$$

$$X = 14 : 2$$

$$X = 7$$

3 - La incógnita tiene un solo valor.

2 - Los números o letras (incógnitas) que pasan de un miembro al otro, lo hacen con la operación inversa.

$$3 \cdot 7 + 5^2 = 13 \cdot 3 + 7$$

$$21 + 25 = 39 + 7$$

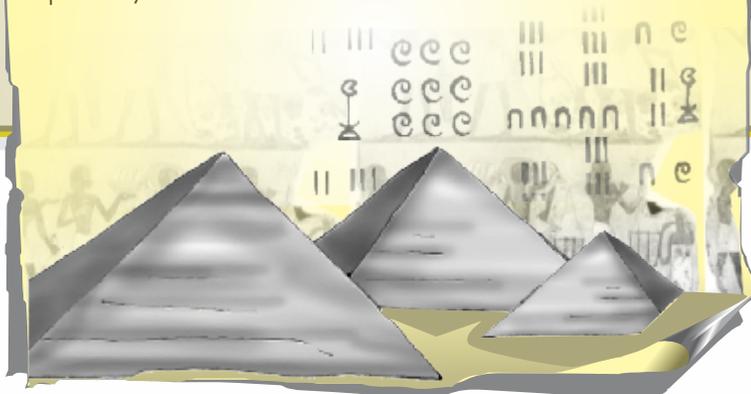
$$46 = 46$$

4 - Finalmente se coloca el valor de cada incógnita y se comprueba la igualdad.

INFO

Papiro de Rhind

Constituye el principal texto matemático egipcio escrito alrededor del 1 600 a. C. Contiene lo esencial del saber matemático de esta cultura. Proporciona reglas para cálculos de adiciones y sustracciones con fracciones, ecuaciones simples de primer grado, distintos problemas de aritmética y mediciones de superficie y volúmenes.



¿ Se utilizan ecuaciones para resolver situaciones problemáticas ?

Sí. Veamos dos posibles situaciones y su resolución.

SITUACIÓN	RESOLUCIÓN
<p>A Si a la edad de Betiana le sumo 10 y luego divido por 3, obtengo la edad de Francisco que tiene 12 años.</p> <p>¿Cuál es la edad de Betiana ?</p> 	<p>La edad de Betiana corresponde a la incógnita (X). Entonces :</p> $(X + 10) : 3 = 12$ $(X + 10) = 12 \cdot 3$ $X + 10 = 36$ $X = 36 - 10$ $X = 26$ <p>La edad de Betiana es 26 años.</p>
<p>B Sofía salió de compras con \$300. Gastó una determinada cantidad en libros, \$107 en ropa y \$60 en bijouterie.</p> <p>Si le quedan \$32, ¿ cuánto gastó en libros ?</p>	$107 + 60 + X + 32 = 300$ $X = 300 - 32 - 60 - 107$ $X = 101$ <p>Gastó en libros \$101.</p>

También se puede aplicar a otro tipo de situaciones.

Lenguaje coloquial	Ecuación	Valor de la incógnita
El triple de la raíz cuadrada de un número es igual a la mitad de 30.	$\sqrt{X} \cdot 3 = 30 : 2$	$X = 25$
El cubo de un número más el siguiente de 11 es igual al anterior de 40.	$X^3 + (11 + 1) = 40 - 1$	$X = 3$
La quinta parte del doble de un número es igual a la raíz cúbica de 64.	$\frac{1}{5}X \cdot 2 = \sqrt[3]{64}$	$X = 10$

¿ Qué diferencia hay entre una ecuación y una inecuación ?

Ecuación ➔ **Igualdad**

1er. miembro			2do. miembro
$2X$	$=$		20
X	$=$	$20 : 2$	
X	$=$	10	

Ambos miembros están separados por el signo igual (=) .

En una ecuación la incógnita tiene un único valor.

Inecuación ➔ **Desigualdad**

1er. miembro			2do. miembro
$8 + X$	$<$		17
X	$<$	$17 - 8$	
X	$<$	9	

Ambos miembros están separados por los signos mayor o menor (> , <) .

En una inecuación la incógnita puede tener uno, varios, infinitos o ningún valor.

Ecuaciones e **inecuaciones** se resuelven siguiendo los mismos pasos.

¿ Cuántos valores puede tener la incógnita en una inecuación ?

Puede tener : un valor
 más de un valor
 infinitos valores
 ningún valor.

Ejemplos.

Incógnita con un único valor

$$7 + m < 2^3$$

$$m < 8 - 7$$

$$m < 1$$

Para que sea verdadera la desigualdad el valor de la incógnita debe ser menor que 1, es decir 0

$$* m = 0$$

* Sólo tenemos en cuenta el conjunto de los números naturales en todos los ejemplos.

Incógnita con más de un valor

$$X + 30 < \sqrt{81} + 3^3$$

$$X + 30 < 9 + 27$$

$$X < 9 + 27 - 30$$

$$X < 6$$

En este caso los valores que acepta la incógnita son los números menores que 6.

Entonces : $X = 0, 1, 2, 3, 4$ o 5

Incógnita con infinitos valores

$$17 + s > 81$$

$$s > 81 - 17$$

$$s > 64$$

Puede tener infinitos valores porque hay infinitos números mayores que 64.

Entonces : $s = 65, 66, 67 \dots$

Incógnita sin ningún valor

$$b + 4 < 60 : 15$$

$$b < 4 - 4$$

$$b < 0$$

No hay ningún número natural menor que 0 .

No tiene solución en el conjunto de los números naturales.

¿ Cómo se puede plantear una situación para resolver con una inecuación ?

De manera semejante que el planteo para las ecuaciones. Analicemos dos ejemplos.

PLANTEO

A El producto de la raíz cuadrada de 100 y cierto número, **es menor** que el producto del triple de 10 y la raíz cuadrada de 4.

B La suma de 7 elevado a cero y un número desconocido, **es mayor** que la diferencia entre la raíz cúbica de 64 y la raíz cúbica de 8.

RESOLUCIÓN

$$\sqrt{100} \cdot X < (10 \cdot 3) \cdot \sqrt{4}$$

$$10 \cdot X < 30 \cdot 2$$

$$10 \cdot X < 60$$

$$X < 60 : 10$$

$$X < 6$$

El valor de X , para que se cumpla lo que pide el planteo, debe ser menor que 6.

$$X = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ ó } 5$$

$$7^0 + X > \sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{8}$$

$$1 + X > 4 - 2$$

$$1 + X > 2$$

$$X > 2 - 1$$

$$X > 1$$

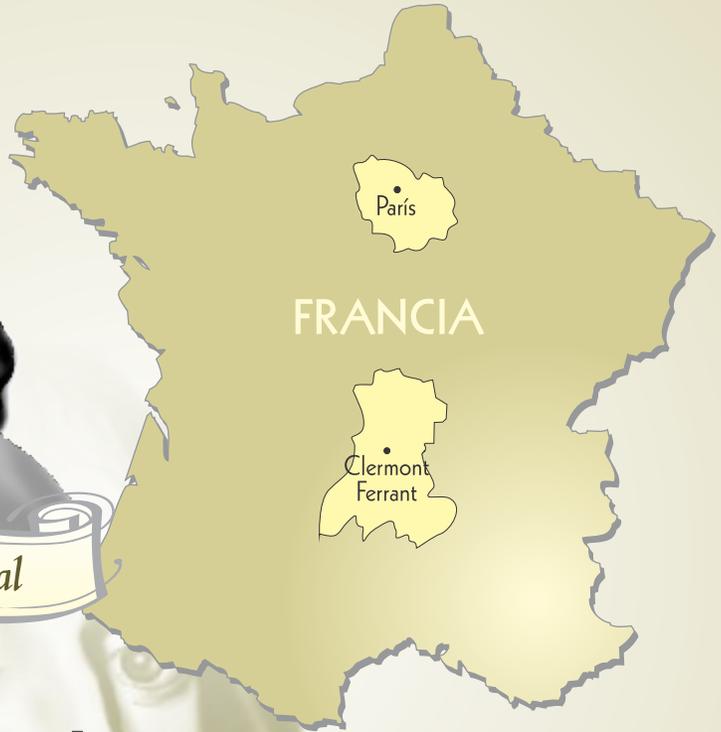
En este caso, cualquier valor que le damos a $X > 1$ hará cumplir esta relación.

$$X = 2, 3, 4, 5, 6 \dots$$

Un matemático notable



Blaise Pascal



Nació en 1 623 en la localidad francesa de Clermont-Ferraut.

Con catorce años comenzó a asistir a reuniones científicas en París.

Inventó la que es considerada la primera máquina calculadora capaz de realizar sumas y restas, bautizada como "Pascaline". Diez años más tardes logró perfeccionarla.

Además de la ciencia matemática también se destacó como físico, filósofo y escritor. Compuso un tratado de los sonidos a la edad de once años, a los doce comenzó el estudio de la geometría y a los dieciséis publicó su ensayo sobre las cónicas.

Falleció en París en el año 1 662.

Un mensaje para compartir

*Si nos mantenemos uno al lado del otro,
apoyándonos y acompañándonos, si
hacemos realidad el espíritu de equipo, si
pese a las diferencias
podemos conformar un grupo humano
para afrontar todo tipo de situaciones,
si entendemos el verdadero valor de la amistad,
si somos conscientes del sentimiento de compartir,
la vida será más simple
y el vuelo de los años más placentero.*

*Anónimo
De "Una historia
de gansos"*



Este libro pretende ser una guía didáctica pensada para los docentes y para todos aquellos que quieran enriquecer sus conocimientos, clarificar conceptos o aprender correctamente y “sin dudas” los principios básicos de la aritmética.

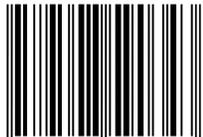
Tiene como objetivos :

- Responder las preguntas esenciales de la aritmética elemental.
- Estimular el uso de un lenguaje matemático preciso.
- Avanzar desde los conceptos simples hasta los temas más complejos que establecen los contenidos curriculares para la educación primaria.

Sus páginas se ven enriquecidas con biografías de matemáticos notables y con mensajes que invitan al lector a descubrir lo verdaderamente importante y trascendente.

En definitiva, un aporte para los que gusten abrirse a nuevos conocimientos y una ayuda para los que necesitan saber más para enseñar mejor.

ISBN 978-950-859-034-3



9 789508 590343