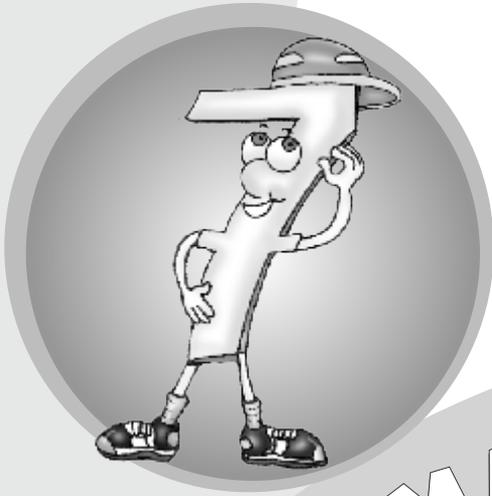


CARLOS JESÉ

CLAVES de la **MATEMÁTICA**

**7** / **1**

ediciones  
**eNePé**  
NUEVAS PROPUESTAS



# CLAVES de la MATEMÁTICA

## **OPERA**

con verdaderos valores para la vida.

## **SUMA**

información, actividades y propuestas.

## **SIMPLIFICA**

para expresar de manera fácil lo difícil o complicado.

## **POTENCIA**

el desarrollo de las capacidades.

## **CONSTRUYE**

el conocimiento con sólidas bases.

# ÍNDICE TEMÁTICO

## 1 NÚMEROS SIDERALES

### La Propuesta

Trabajar con mucho **ESMERO** y con la mayor **PRECISIÓN**.

página 1

Nuestro sistema de numeración.  
Composición y descomposición de números.  
Descomposición polinómica.  
Las operaciones y sus propiedades.  
Potencias y raíces.  
Propiedades de la potenciación.  
Generalidades de la radicación.  
Radicación : propiedad distributiva.  
Cálculos combinados : sin signos de agrupamiento y con signos de agrupamiento.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 3 ENTRE MÚLTIPLOS Y DIVISORES

### La Propuesta

Compartir con **GENEROSIDAD** y **ENTREGA**.

página 45

Múltiplos y divisores.  
Criterios de divisibilidad.  
Descomposición de un número en sus factores primos.  
Múltiplo común menor y divisor mayor común.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 2 INCÓGNITAS PARA DEVELAR

### La Propuesta

Incorporar el **ESFUERZO** y la **CONSTANCIA** a nuestra vida diaria.

página 31

Lenguaje coloquial y simbólico.  
Ecuaciones : con incógnita en un miembro y en ambos miembros.  
Inecuaciones.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 4 DISEÑO CON RECTAS Y ÁNGULOS

### La Propuesta

Actuar con **RESPONSABILIDAD** y **CONOCIMIENTO**.

página 59

Recta, semirrecta y segmento.  
Rectas coplanares :

- secantes perpendiculares
- secantes oblicuas
- paralelas.

Rectas no coplanares.  
Segmentos consecutivos y no consecutivos.  
Ángulos convexos : agudo, recto, obtuso.  
Ángulo llano, cóncavo y completo.  
Ángulos consecutivos y no consecutivos.  
Ángulos adyacentes y opuestos por el vértice.  
Ángulos complementarios y suplementarios.  
Sistema sexagesimal; las cuatro operaciones : adición, sustracción, multiplicación y división.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 5 TODO EN FRACCIONES

### La Propuesta

Estudiar parte por parte  
con EMPEÑO y  
DEDICACIÓN

Página 77

Fracciones : concepto, ubicación en la recta numérica.  
Fracciones equivalentes.  
Comparación.  
Fracción de un entero.  
Fracciones decimales.  
Adición y sustracción.  
Adición y sustracción de números mixtos.  
Multiplicación y división.  
Multiplicación y división de números mixtos.  
Potencias y raíces.  
Cálculos combinados.  
Ecuaciones.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 6 DECIMALES EN LA MIRA

### La Propuesta

Festejar los logros  
con ALEGRÍA y  
HUMILDAD.

Página 97

Ubicación de números decimales en la recta numérica.  
Números decimales y fracciones decimales.  
Comparación.  
Distintas expresiones de un número decimal.  
Expresiones decimales exactas.  
Expresiones decimales periódicas : puras y mixtas.  
Adición, sustracción, multiplicación y división.  
Cálculos combinados.  
Ecuaciones.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 7 CON PROPORCIONALIDAD

### La Propuesta

Actuar con JUSTICIA  
dando a cada uno lo  
que le corresponde

Página 115

Razones y proporciones.  
Proporciones : escritura, lectura, elementos, propiedad fundamental.  
Valor de un extremo o un medio desconocido.  
Proporcionalidad.  
Magnitudes directamente proporcionales.  
Magnitudes inversamente proporcionales.  
Magnitudes no proporcionales.  
Regla de tres simple directa.  
Regla de tres simple inversa.  
Porcentaje.  
Repartición proporcional.  
Escalas.  
Regla de tres compuesta directa, inversa y mixta.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 8 ESTADÍSTICAS Y ALGO MÁS

### La Propuesta

Elegir con  
CONVICCIÓN y  
COMPROMISO.

Página 149

Trabajo estadístico :  
población, variable y muestra.  
Variables cuantitativas y cualitativas.  
Frecuencia absoluta, relativa y porcentual.  
Encuestas.  
Frecuencia, promedio y moda.  
Organización de la información : gráfico de barras, polígonos de frecuencia y gráficos circulares.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 9 SOBRE LA SUPERFICIE

### La Propuesta

Ser precisos en los cálculos cuidando nuestros recursos y los de la naturaleza.

página 163

Polígonos : cóncavos y convexos.  
Denominación por la cantidad de lados.  
Elementos de un polígono regular.  
Suma de los ángulos interiores de un polígono.  
Construcción de un polígono regular.  
Perímetro.  
Triángulos : lados y ángulos. Clasificación.  
Construcción. Propiedades.  
Cuadriláteros : trapezoides, trapecios y paralelogramos. Construcción.  
Circunferencia y círculo.  
Elementos de la circunferencia.  
Relación de las rectas con la circunferencia.  
Relación de dos circunferencias entre sí.  
Longitud de la circunferencia.  
Superficie de figuras poligonales y circulares.  
Diferencia entre superficie y área.  
Medidas de superficie.  
Área de : rectángulo, paralelogramo, triángulo, trapecio, rombo, romboide y cuadrado.  
Área de polígonos regulares.  
Área de : círculo, corona circular, sector circular y trapecio circular.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 10 MISIÓN CUERPOS GEOMÉTRICOS

### La Propuesta

Observar las grandes obras con ADMIRACIÓN y RESPETO.

página 193

Poliedros regulares.  
Desarrollo y elementos de : tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro.  
Área de poliedros regulares.  
Poliedros irregulares.  
Prismas rectos, regulares e irregulares.  
Prismas oblicuos.  
Elementos y desarrollo de un prisma regular.  
Pirámides rectas regulares : elementos, propiedades y desarrollo.  
Área lateral y total del prisma y de la pirámide.  
Cuerpos redondos : origen.  
Área lateral y total del cilindro, del cono y de la esfera.  
Volumen. El metro cúbico.  
Múltiplos y submúltiplos de las medidas de volumen.  
Volumen de cuerpos con bases congruentes y paralelas.  
Volumen del prisma triangular, rectangular, cuadrado y pentagonal.  
Volumen del cilindro, de la pirámide y del cono.  
Equivalencia entre medidas de volumen, de capacidad y de peso.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 11 BUCEANDO CON LOS NÚMEROS ENTEROS

### La Propuesta

Llevar adelante nuestros proyectos con ENTUSIASMO, DECISIÓN y PERSEVERANCIA.

página 225

Números enteros : positivos y negativos.  
Valor absoluto.  
Números enteros opuestos.  
Comparación.  
Representación en el sistema de ejes.  
Uso de los signos + y - .  
Adición y sustracción.

Suma algebraica : sin paréntesis, con paréntesis.  
Propiedad cancelativa.  
Multiplicación y división.  
Cálculos combinados.  
Un poco de todo.  
Evaluando lo aprendido.  
En síntesis.

## 10

MISIÓN CUERPOS  
GEOMÉTRICOS

## La Propuesta

Observar las grandes obras  
con ADMIRACIÓN  
y RESPETO.

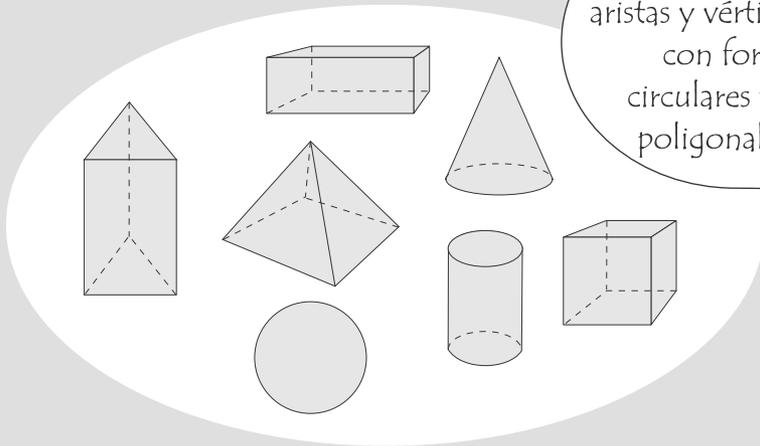
La Pirámide de  
Keops es una de las 7  
maravillas del mundo. Cada lado  
de la base mide 230 m y la  
altura es de 146,6 m.

¿Podemos calcular el  
volamen con esos datos?

Averigüémoslo.

# CUERPOS GEOMÉTRICOS

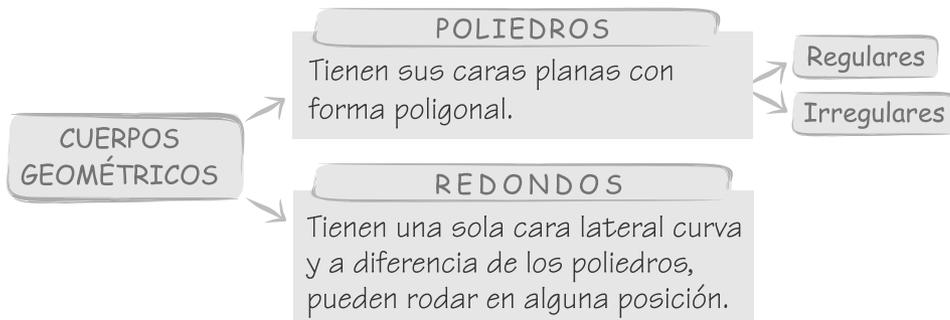
Veamos un conjunto de estos cuerpos.



Observo caras planas y curvas, aristas y vértices, bases con formas circulares y otras poligonales ...



Empecemos a clasificarlos teniendo en cuenta sus propiedades.



## POLIEDROS REGULARES

- Las caras son polígonos regulares congruentes.
- En cada vértice concurre el mismo número de caras.

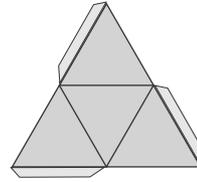
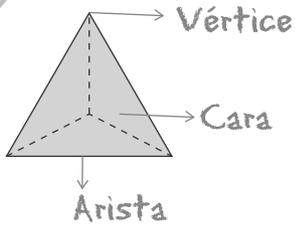
Hay 5 poliedros regulares :

**Tetraedro , Cubo o Hexaedro , Octaedro , Dodecaedro e Icosaedro**

Analícemos cada uno.

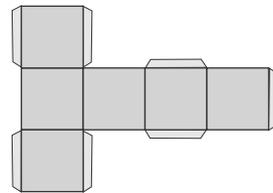
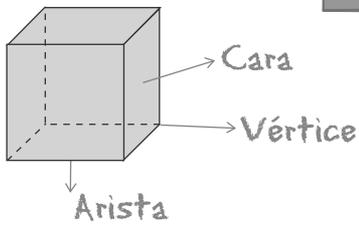


**Tetraedro**



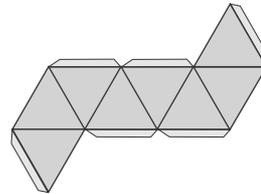
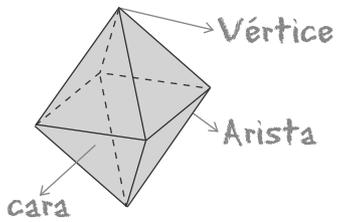
Las cuatro caras son **triángulos equiláteros**.

**Hexaedro o cubo**



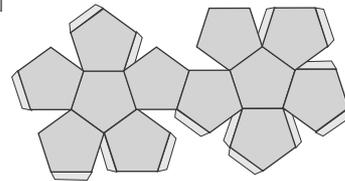
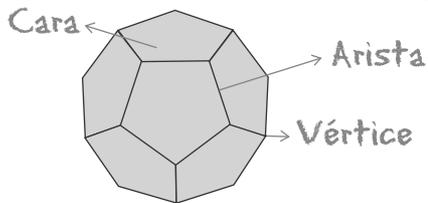
Las seis caras son **cuadrados**.

**Octaedro**



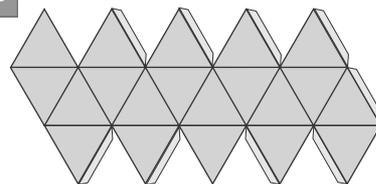
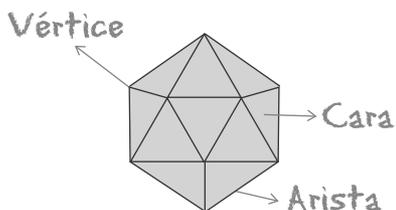
Las ocho caras son **triángulos equiláteros**.

**Dodecaedro**



Las doce caras son **pentágonos regulares**.

**Icosaedro**



Las veinte caras son **triángulos equiláteros**.

## ÁREA DE POLIEDROS REGULARES

En todo **poliedro regular** el área es igual al producto de la **superficie de una cara** por el **número de caras**. Observá los diferentes poliedros y completá las fórmulas.



## TETRAEDRO

Cantidad de caras . Área de 1 cara

$$4 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

Simplificamos  $\frac{2}{4} \cdot \frac{b \cdot h}{2}$

Fórmula  $2 \cdot b \cdot h$

## CUBO

Cantidad de caras . Área de 1 cara

Fórmula

## OCTAEDRO

Cantidad de caras . Área de 1 cara

Fórmula

## DODECAEDRO

Cantidad de caras . Área de 1 cara

Fórmula

## ICOSAEDRO

Cantidad de caras . Área de 1 cara

Fórmula

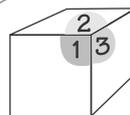


Completá el cuadro con el número de aristas y el número de vértices de cada poliedro regular sabiendo que responden a estas fórmulas.

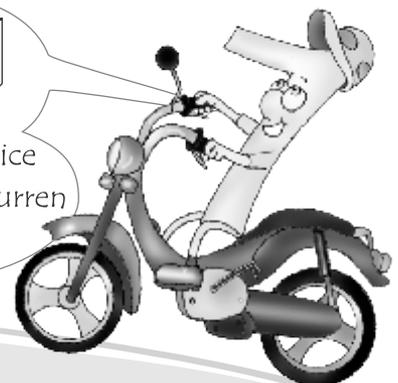
$$\text{Aristas} = \frac{\text{N}^\circ \text{ de caras} \cdot \text{N}^\circ \text{ de lados de cada cara}}{2}$$

$$\text{Vértices} = \frac{\text{N}^\circ \text{ de caras} \cdot \text{N}^\circ \text{ de lados de cada cara}}{\text{N}^\circ \text{ de caras que concurren en cada vértice}}$$

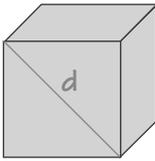
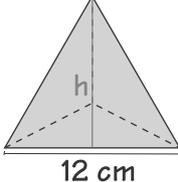
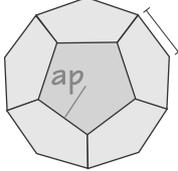
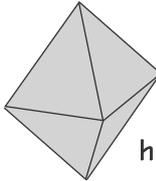
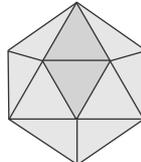
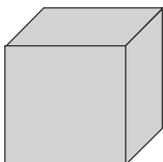
Poliedros regulares	Aristas	Vértices
Tetraedro		
Hexaedro		
Octaedro		
Dodecaedro		
Icosaedro		



En cada vértice del cubo concurren 3 caras.



 **2** Hallá el área de estos poliedros regulares.

 <p><math>d = 1,8 \text{ dm}</math></p> <p>Área del cubo =</p>	 <p><math>h = 10,8 \text{ cm}</math></p> <p>Área del tetraedro =</p>
 <p><math>12 \text{ cm}</math></p> <p><math>ap = 8,28 \text{ cm}</math></p> <p>Área del dodecaedro =</p>	 <p>Perímetro de una cara = <math>15,6 \text{ cm}</math></p> <p><math>h \text{ de la cara} = 4,4 \text{ cm}</math></p> <p>Área del octaedro =</p>
 <p>Área del rombo = <math>189 \text{ cm}^2</math></p> <p>Área del icosaedro =</p>	 <p>Área del cubo = <math>96 \text{ cm}^2</math></p> <p>Arista del cubo =</p>

 **3** Resolvé.

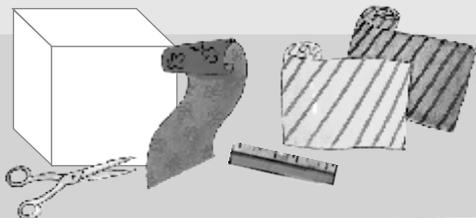
**a** Un cubo de  $25 \text{ cm}$  de arista se forró de la siguiente manera :

✓ 3 caras de color azul    ✓ 2 caras de color rojo    ✓ 1 cara de color amarillo

¿ Cuántos  $\text{cm}^2$  de papel de cada color ?

azul	rojo	amarillo
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

¿ Cuántos  $\text{cm}^2$  en total ?



**b** ¿Cuál es el área de un tetraedro en el que la suma de todas sus aristas es  $48 \text{ cm}$  y la altura de cada cara  $7,2 \text{ cm}$  ?



## POLIEDROS IRREGULARES

A diferencia de los regulares, no tienen todas sus caras congruentes. Así se clasifican.



## PRISMAS

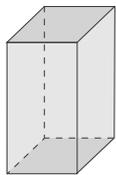
- Las dos bases son polígonos congruentes.
- Las caras laterales son cuadriláteros.

### Prismas rectos

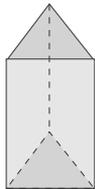
- Las caras laterales son perpendiculares a las bases.

#### Regulares

Las bases son polígonos regulares.



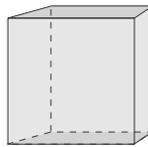
cuadrados



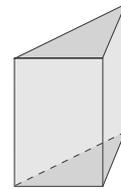
triángulos  
equiláteros

#### Irregulares

Las bases son polígonos irregulares.



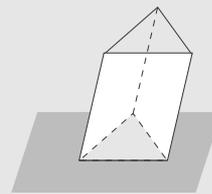
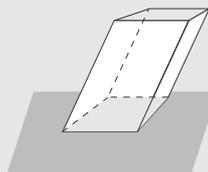
rectángulos



triángulos  
no equiláteros

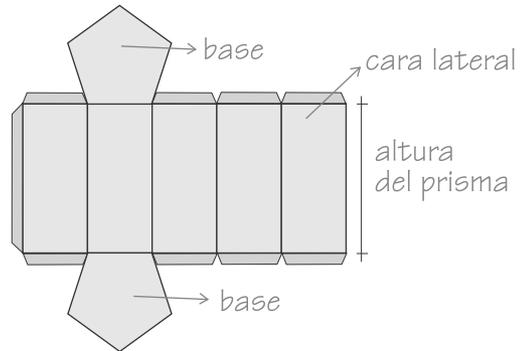
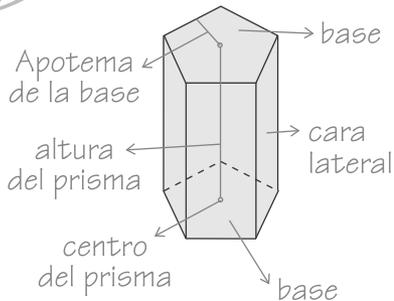
### Prismas oblicuos

- Las caras laterales no son perpendiculares a las bases.



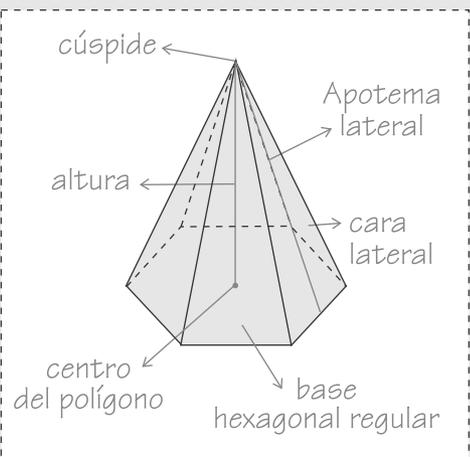
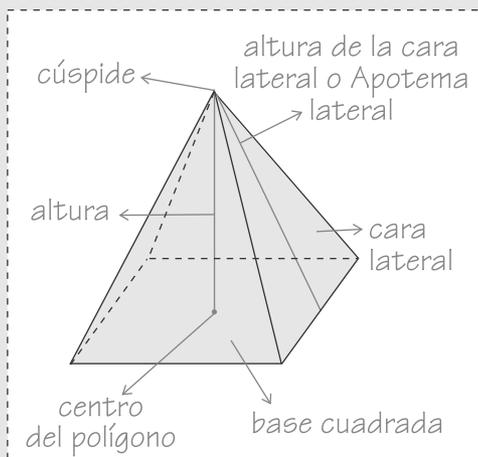


Elementos y desarrollo de un PRISMA REGULAR.



PIRÁMIDES

Pirámides rectas regulares

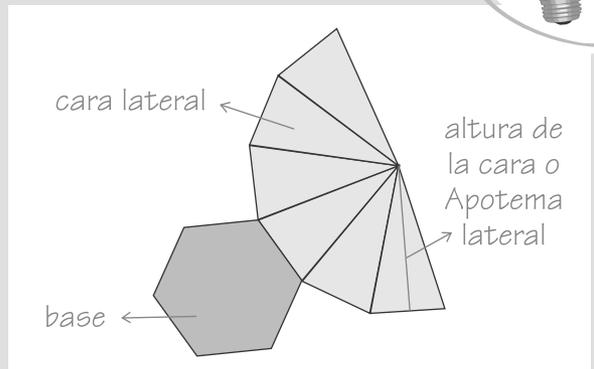
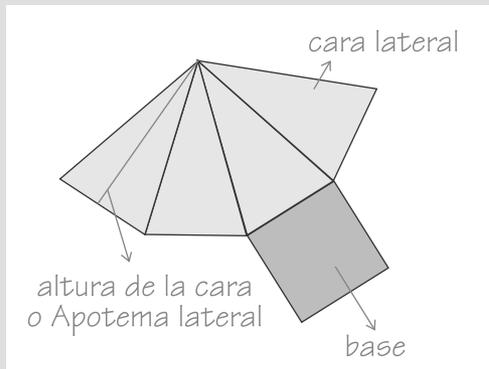


Propiedades

- a - La **base** es siempre un polígono regular que le da el nombre a la pirámide.  
Ejemplo : base triángulo equilátero = pirámide triangular  
base hexágono regular = pirámide hexagonal ...
- b - Las **caras laterales** son triángulos isósceles congruentes.
- c - La **altura de la pirámide** une la cúspide con el centro del polígono de la base.
- d - La **altura de una cara** es la apotema de la pirámide o apotema lateral.



### Elementos y desarrollo de PIRÁMIDES RECTAS REGULARES.



### ÁREA DE POLIEDROS IRREGULARES

En los prismas y pirámides se puede calcular :

#### Área lateral (AL)

Es el **área de las caras laterales**.

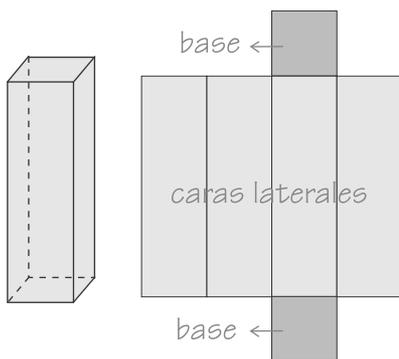
#### Área total (AT)

Es el **área lateral**  $\oplus$  el **área de la base o las bases** según sea una pirámide o un prisma.

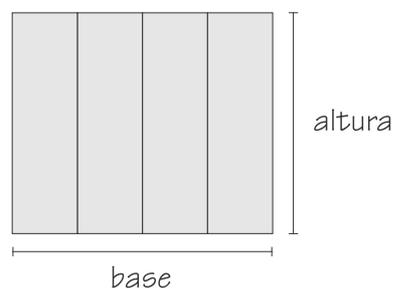
Es muy simple, hay que identificar los polígonos que forman las caras laterales y las bases y aplicar las fórmulas para hallar cada área.

### Área lateral y total del prisma

**1** Veamos el desarrollo de un prisma.



**2** Las cuatro caras laterales forman un rectángulo.



3 AL del prisma = Área del rectángulo  
**AL del prisma =  $b \cdot h$**   
 Siendo :  
 $b$  = perímetro de la base del prisma  
 $h$  = altura del prisma.

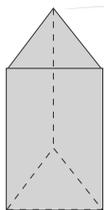
4 Entonces :  
 AL del prisma = perímetro de la base  $\cdot h$   
**AL del prisma =  $P_b \cdot h$**

5 **AT del prisma = AL + Área de las dos bases**

4 Experimentando con envases.



5 ¡ A calcular !



La base de un prisma irregular es un triángulo isósceles en el que sus lados iguales miden **4,2 m** , el restante **6,5 m** y la altura **3,4 m** .  
 ¿ Cuál será el **área lateral** y **total** si la altura del prisma es de **12 m** ?

Lateral  Total

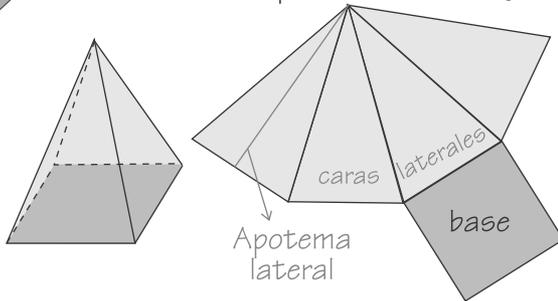
6 Resolvé.





### Área lateral y total de la pirámide

1 Desarrollamos una pirámide cuadrangular.



2 Observá que el área lateral de la pirámide equivale al área de 4 triángulos congruentes.

$$\text{AL de la pirámide} = 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$$

3 La base de cada triángulo es congruente con un lado de la base de la pirámide.

$$4 \cdot b = \text{Perímetro de la base (Pb)}$$

Reemplazamos :

$$\text{AL de la pirámide} = \frac{Pb \cdot h}{2}$$

4 Y la altura de cada triángulo es igual a la apotema lateral de la pirámide.

$$h = \text{Apotema lateral (Ap lat)}$$

Entonces :

$$\text{AL de la pirámide} = \frac{Pb \cdot \text{Ap lat}}{2}$$

5

$$\text{AT de la pirámide} = \text{AL} + \text{A de la base}$$

No confundas la apotema de la pirámide (**Ap**) con la apotema de la base (**ap**) que aparece cuando la base tiene 5 ó más lados y es fundamental para hallar el área total.



7 Hallá el **área lateral** y **total** de estos poliedros.

**Pirámide hexagonal**

$Ap = 6,8 \text{ m}$   
 $ap = 2,61 \text{ m}$   
 $3 \text{ m}$

Área lateral =   
 Área de la base =   
 Área total =

**Prisma pentagonal**

$1,74 \text{ m}$   
 $ap = 0,18 \text{ m}$   
 $0,26 \text{ m}$

Área lateral =   
 Área de la base =   
 Área total =

**Pirámide cuadrangular**

$Ap = 39 \text{ m}$   
 $15 \text{ m}$

Área lateral =   
 Área de la base =   
 Área total =

8 Calculá el área lateral de estos muebles.

$2,5 \text{ m}$   
 $2,08 \text{ m}$   
 $0,45 \text{ m}$

Área lateral =

$65 \text{ cm}$   
 $15 \text{ cm}$

Área lateral =

9 Entre vidrios y cartones.

a

$25 \text{ cm}$   
 $20 \text{ cm}$   
 $ap \text{ base} = 17,4 \text{ cm}$

¿ Cuántos  $\text{m}^2$  de vidrio hay que comprar para construir un pecera hexagonal como ésta?

b

¿ Cuántos  $\text{m}^2$  de cartón serán necesarios para elaborar 5 000 envases?

**Leche**

Lado del triángulo equilátero de la base =  $8 \text{ cm}$   
 Ap de la pirámide =  $11 \text{ cm}$   
 h de la base =  $7 \text{ cm}$



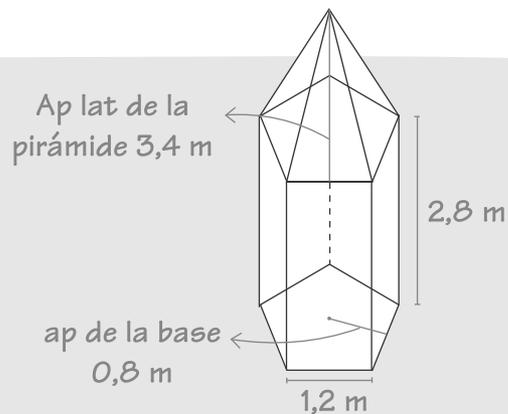
10 Resolvé.

- a La base cuadrada de una pirámide tiene **120 cm** de perímetro. Si la apotema lateral equivale al doble del valor de un lado de la base,

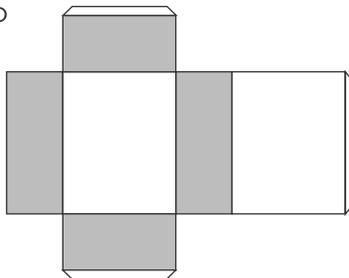
¿cuál será el  
área total?

- b El área lateral de un prisma de base cuadrada es **336 cm<sup>2</sup>**. Un lado de la base mide **6 cm**.  
Calculá la altura.

- c Sobre un prisma de base pentagonal se construyó una pirámide con las medidas que indica el dibujo.  
Hallá el área total de la figura.



11 Identificá a qué cuerpo corresponde este desarrollo. Luego medí y hallá cada área.



Cuerpo :

AL =

AT =



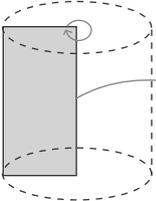
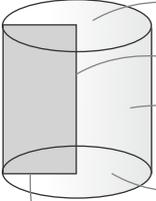
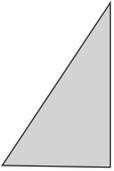
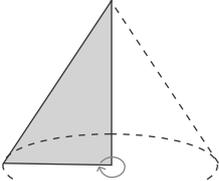
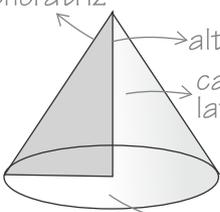
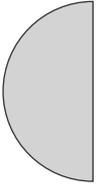
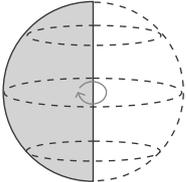
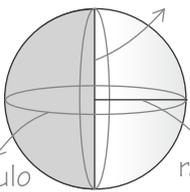
12 Completá el cuadro.

Poliedro irregular	Medidas de la base	altura (prisma) o Ap lat (pirámide)	Área lateral	Área de la base	Área total
Pirámide	lado = 8 cm Ap = 9,7 cm	Ap lat = 32 cm			
Prisma	<input type="text"/> 6 cm 14 cm	altura = 40 cm			
Prisma	<input type="text"/> 4,6 dm	altura = 20 cm			



## CUERPOS REDONDOS

Estos cuerpos se llaman también **"de rotación"** porque se generan haciendo girar **360°** una figura plana alrededor de un eje de rotación. El **cilindro**, el **cono** y la **esfera** son algunos de los cuerpos de rotación. Conozcamos su origen.

Figura plana	Cuerpo que se genera por rotación de esa figura plana	Elementos
 <p>Rectángulo</p>	 <p>Cilindro</p>	 <p>base altura cara lateral base radio de la base</p>
 <p>Triángulo rectángulo</p>	 <p>Cono</p>	 <p>generatriz altura cara lateral base</p>
 <p>Semicírculo</p>	 <p>Esfera</p>	 <p>diámetro radio círculo máximo</p>

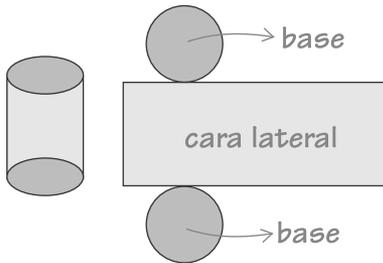
## En síntesis

- El **cilindro** se genera por la rotación de un **rectángulo** que tiene como eje uno de sus lados.
- El **cono** se genera por la rotación de un **triángulo rectángulo** que tiene como eje uno de sus catetos.
- La **esfera** se genera por la rotación de un **semicírculo** que tiene como eje su diámetro.

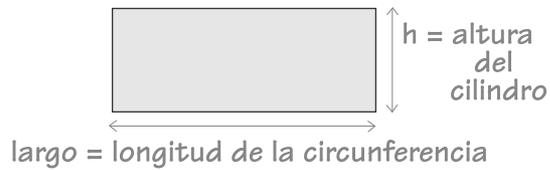
### Área lateral y total del cilindro



1 Desarrollamos un cilindro.



2 El **área lateral** equivale al área de un rectángulo cuyo largo es la longitud de la circunferencia de la base y el ancho es la altura del cilindro.



3 Entonces :

$A_L$  del cilindro =  $A$  del rectángulo

$A_L$  del cilindro =  $b \cdot h$

Siendo :

$b$  = longitud de la circunferencia

$h$  = altura del cilindro

4 Reemplazamos.

$A_L$  del cilindro =  $b \cdot h$

$A_L$  del cilindro = Long circunf  $\cdot h$

$A_L$  del cilindro =  $\pi \cdot d \cdot h$

5 Área total del cilindro = Área lateral + Área de las 2 bases

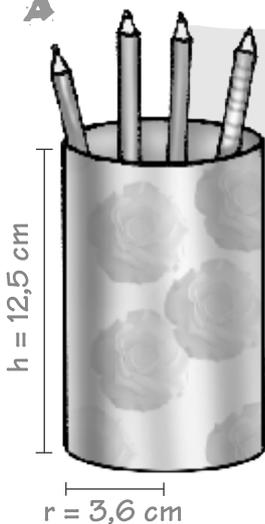
$A_T$  del cilindro =  $A_L$  +  $2 \cdot A$  de la base

$A_T$  del cilindro =  $\pi \cdot d \cdot h$  +  $2 \cdot \pi \cdot r^2$



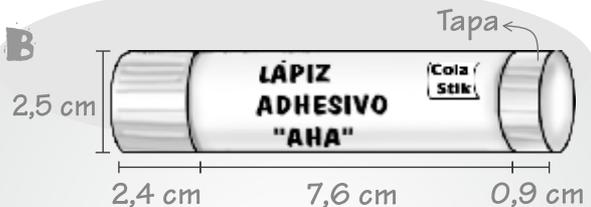
13 Áreas para calcular.

A



¿ Cuántos  $\text{cm}^2$  de papel se necesitan para cubrir completamente la cara lateral del lapicero cilíndrico ?

B



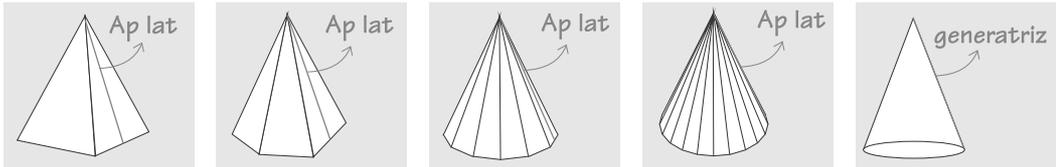
¿Cuál es el área total de la tapa ?

¿ Cuántos  $\text{m}^2$  de papel necesita el fabricante para cubrir el espacio que lleva la marca en 5 000 adhesivos ?



### Área lateral y total del cono

Podemos considerar al **cono** como una pirámide de infinitas caras.



Observá que el **perímetro de la base** de la pirámide se convierte en la **longitud de la circunferencia** en el cono y el **apotema lateral** en la **generatriz ( g )**.

Entonces :

Si ...

$$AL \text{ de la pirámide} = \frac{P_b \cdot Ap \text{ lat}}{2}$$

Entonces ...

$$AL \text{ del cono} = \frac{\text{Long circunf} \cdot \text{generatriz ( g )}}{2}$$

### Desarrollo de la fórmula

$$AL \text{ del cono} = \frac{\text{Long circunf} \cdot g}{2}$$

$$AL \text{ del cono} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot g}{2}$$

$$AL \text{ del cono} = \frac{\cancel{2} \cdot \pi \cdot r \cdot g}{\cancel{2}}$$

$$AL \text{ del cono} = \pi \cdot r \cdot g$$

$$AT \text{ del cono} = AL + \text{área de la base}$$

### Área total de la esfera

No se puede desarrollar una esfera como hicimos con los otros cuerpos redondos y poliedros. Para tener una idea del **área total** que ocupa deberíamos realizar la siguiente actividad.

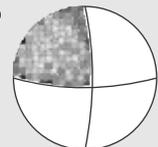
- 1 Trazar un círculo máximo en una esfera.



Área de un círculo máximo es

$$\pi \cdot r^2$$

- 2 Después cortar en pedacitos ese círculo máximo y pegarlo sobre una esfera del mismo diámetro. Veríamos que cubre  $\frac{1}{4}$  de la misma.

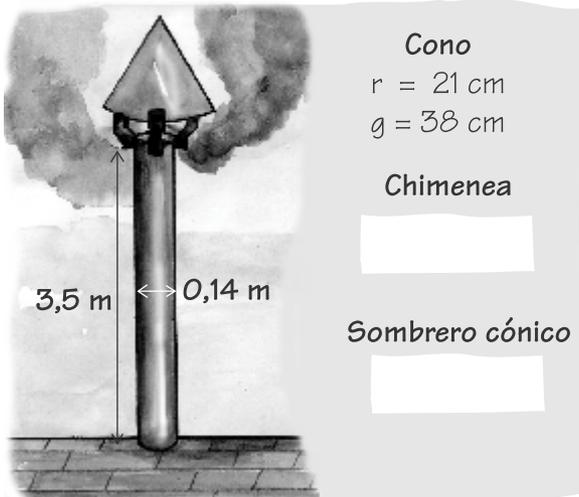


Entonces :  $AT \text{ de la esfera} = 4 \text{ círculos máximos}$

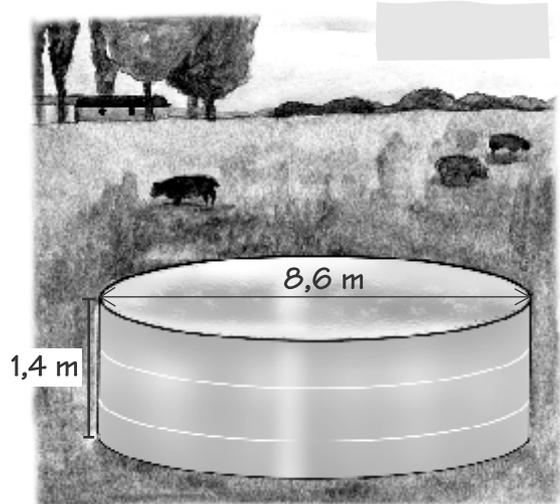
$$AT \text{ de la esfera} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

 14 Hallá el área lateral de . . .

a) . . . la chimenea y el sombrero cónico.



b) . . . este tanque australiano.



 15 Coloreá el cuerpo que tiene mayor área total.



 16 Respondé.

¿Cuál es el valor del radio de una esfera que tiene  $1256 \text{ cm}^2$  de área total?

 17 Resolvé.

En una establecimiento dedicado a envasar duraznos al natural emplean **2 800 latas** por día.

¿Cuántos  $\text{m}^2$  de hojalata se utilizarán diariamente sabiendo que cada lata tiene **5 cm** de radio y **11,5 cm** de altura?



# VOLUMEN

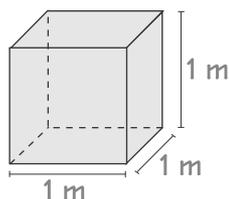


¿Cuál habrá elegido?

Aprendamos a calcular **volumenes** para resolver situaciones como ésta.

Todo cuerpo ocupa un lugar en el espacio. La cantidad de espacio que ocupa es una medida llamada **volumen**.

Para hallar esa medida se tienen en cuenta tres dimensiones: **largo, ancho y alto**.



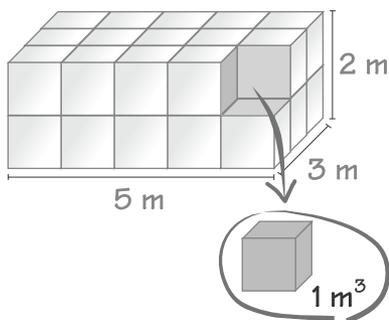
$$\begin{array}{|c|} \hline \text{largo} \\ \hline 1 \text{ m} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{ancho} \\ \hline 1 \text{ m} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{alto} \\ \hline 1 \text{ m} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{volumen} \\ \hline 1 \text{ m}^3 \\ \hline \end{array}$$

El metro cúbico ( $\text{m}^3$ ) es la unidad de las medidas de volumen.



Hagamos una comprobación en un ejemplo.

¿Cuántos cubos de 1 m de arista se necesitan para cubrir completamente este prisma?



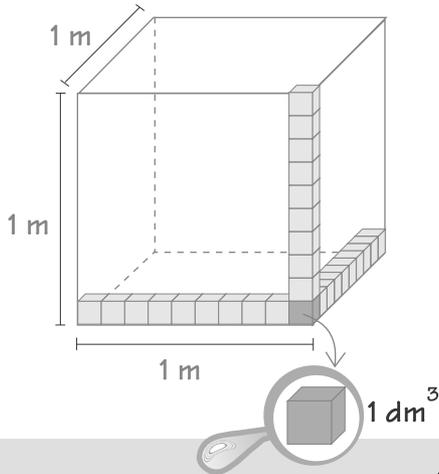
Multiplicamos sus tres dimensiones:

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{largo} \\ \hline 5 \text{ m} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{ancho} \\ \hline 3 \text{ m} \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \text{alto} \\ \hline 2 \text{ m} \\ \hline \end{array} = 30 \text{ m}^3$$

Respuesta: Se necesitan **30 cubos** de 1 m de arista.



Observá el dibujo y coloreá la opción correcta..



Para llenar un cubo de  $1\text{ m}^3$  se necesitan  ,  o  cubos de  $1\text{ dm}^3$ .

$1\text{ m}^3 =$    $\text{dm}^3$

Las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1 000 en 1 000 .



Múltiplos			Unidad	Submúltiplos		
$\text{km}^3$	$\text{hm}^3$	$\text{dam}^3$	$\text{m}^3$	$\text{dm}^3$	$\text{cm}^3$	$\text{mm}^3$
$1\ 000\ 000\ 000\ \text{m}^3$	$1\ 000\ 000\ \text{m}^3$	$1\ 000\ \text{m}^3$	<b>1</b>	$0,001\ \text{m}^3$	$0,000001\ \text{m}^3$	$0,000000001\ \text{m}^3$

Conversion factors shown below the table:

- $\text{km}^3 \rightarrow \text{m}^3$ :  $\cdot 1\ 000\ 000\ 000$
- $\text{hm}^3 \rightarrow \text{m}^3$ :  $\cdot 1\ 000\ 000$
- $\text{dam}^3 \rightarrow \text{m}^3$ :  $\cdot 1\ 000$
- $\text{m}^3 \rightarrow \text{dm}^3$ :  $\cdot 1\ 000$
- $\text{m}^3 \rightarrow \text{cm}^3$ :  $\cdot 1\ 000\ 000$
- $\text{m}^3 \rightarrow \text{mm}^3$ :  $\cdot 1\ 000\ 000\ 000$

Observá y completá.

$12\ \text{m}^3$ a $\text{dm}^3 =$	$12 \cdot 1\ 000 =$	$12\ 000\ \text{cm}^3$
$95\ \text{m}^3$ a $\text{dam}^3 =$	$95 : 1\ 000 =$	$0,095\ \text{dam}^3$
$0,87\ \text{dm}^3$ a $\text{mm}^3 =$	$0,87 : 1\ 000\ 000 =$	
$75\ \text{dm}^3$ a $\text{cm}^3 =$		
$19,93\ \text{hm}^3$ a $\text{km}^3 =$		
$0,0095\ \text{dam}^3$ a $\text{dm}^3 =$		



**18** El número que corresponde al resultado de cada actividad completa una información.

a)  $20 \text{ dam}^3 = \boxed{\phantom{00000}} \text{ m}^3$

b)  $400\,000\,000 \text{ m}^3 = \boxed{\phantom{00000}} \text{ hm}^3$

c)  $0,0015 \text{ dm}^3 = \boxed{\phantom{00000}} \text{ mm}^3$

d)  $0,047 \text{ km}^3 = \boxed{\phantom{00000}} \text{ hm}^3$

e)  $(\frac{1}{2} \text{ hm}^3 \cdot 15,6) + 0,002529 \text{ km}^3 = \boxed{\phantom{00000}} \text{ dam}^3$

f)  $8\frac{1}{5} \text{ cm}^3 - 7,844 \text{ cm}^3 = \boxed{\phantom{00000}} \text{ mm}^3$

g) ¿Cuántos  $\text{dm}^3$  se deben restar a  $467 \text{ dm}^3$  para obtener  $0,192 \text{ m}^3$ ?  $\boxed{\phantom{00000}}$

a) El **Aeropuerto Internacional de Ezeiza** se inauguró en 1949 y actualmente recibe unas  $\boxed{\phantom{00000}}$  personas por día.

b) Un ejemplar macho de **elefante marino austral** produce  $\boxed{\phantom{00000}}$  litros de aceite. Para evitar su extinción se aprobó en 1964 una ley que prohíbe su captura.

c) Estos **elefantes marinos** pueden sumergirse hasta los  $\boxed{\phantom{00000}}$  m de profundidad para cazar pulpos, rayas y calamares, sus alimentos preferidos.

d) Hay  $\boxed{\phantom{00000}}$  **danzas folklóricas** consideradas tradicionales. Las más difundidas son la zamba y el malambo.

e) En **1999** se dio la máxima producción de leche vacuna en el país:  $\boxed{\phantom{00000}}$  millones de litros.

f) El **Parque Nacional "Los Glaciares"** alberga  $\boxed{\phantom{00000}}$  glaciares, entre ellos el Perito Moreno casi tan grande como la Capital Federal.

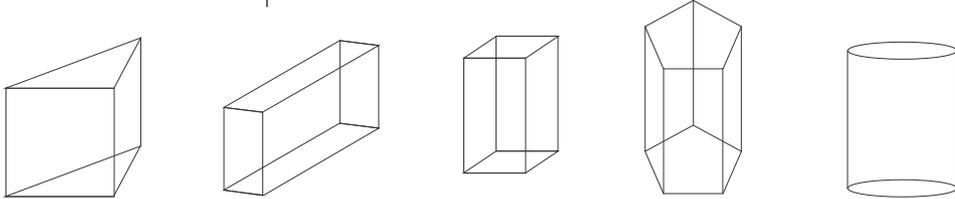
g) Las **Cataratas del Iguazú** cuentan con  $\boxed{\phantom{00000}}$  cascadas y saltos.



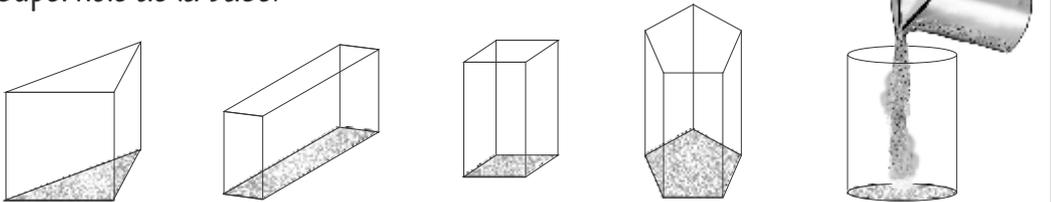


### 1 - VOLUMEN DE CUERPOS CON BASES CONGRUENTES Y PARALELAS

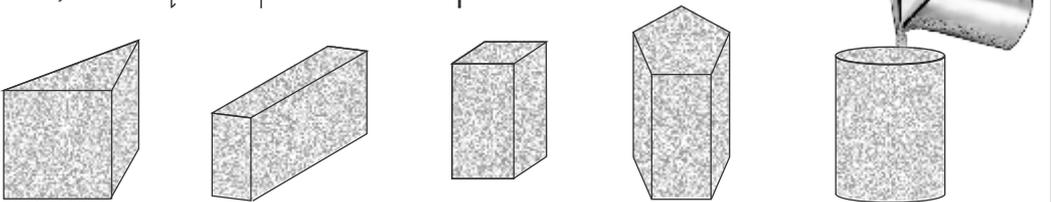
a) Imaginemos estos cuerpos donde sólo dejamos la **base de apoyo** y retiramos la base superior.



b) Ponemos un poco de arena en cada cuerpo hasta cubrir la **superficie de la base**.



c) Después agregamos arena en cada uno hasta que se llene, es decir, hasta que ocupe **todo el cuerpo**.



¿ Qué hicimos para que la arena tomara la forma de cada **cuerpo geométrico** ?

Muy simple :

1 - Cubrir con arena **la base**.

2 - Llenarlo hasta la **altura** que cada cuerpo tiene.

¿ Y qué actividad matemática realizamos ?

¡ **SUPERFICIE DE LA BASE** por **ALTURA DEL CUERPO** !

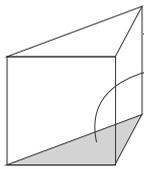
Podemos deducir entonces que, para todo cuerpo que tenga **bases congruentes y paralelas**, la fórmula para conocer su volumen es :

**Área de la base . h del cuerpo**



Así tenemos que :

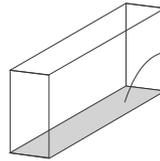
**PRISMA TRIANGULAR**



Área del triángulo . h

$$\frac{b \cdot h}{2} \cdot h \text{ del cuerpo}$$

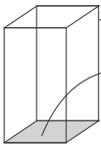
**PRISMA RECTANGULAR**



Área del rectángulo . h

$$l \cdot a \cdot h \text{ del cuerpo}$$

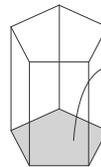
**PRISMA CUADRADO**



Área del cuadrado . h

$$l^2 \cdot h \text{ del cuerpo}$$

**PRISMA PENTAGONAL**



Área del pentágono . h

$$\frac{P \cdot ap}{2} \cdot h$$

**CILINDRO**



Área del círculo . h

$$\pi \cdot r^2 \cdot h \text{ del cuerpo}$$



19 ¡ A determinar volúmenes !

**a** ¿ Cuántos  $m^3$  de agua puede contener una pecera con forma de prisma rectangular que tiene **60 cm** de largo, **25 cm** de ancho y **30 cm** de profundidad.

**b** ¿ Qué volumen de aire contiene un prisma hexagonal regular de **1,2 m** de altura, **5 m** de arista de base y **4,35 m** de apotema ?

**c**



Para la construcción de un aljibe se hace un pozo cilíndrico de **12 m** de profundidad y **1,5 m** de diámetro.

¿ Cuántos  $m^3$  de tierra se extrajeron ?

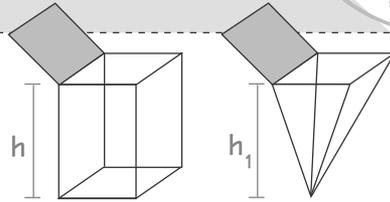
¿ Es más o menos que  $21\,200\,dm^3$  ?

## 2 - VOLUMEN DE LA PIRÁMIDE

Una experiencia sencilla que aclara las dudas.



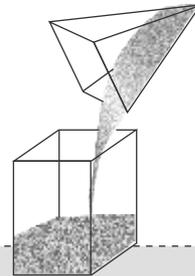
- a) Construí con cartulina un **prisma** y una **pirámide** que tengan bases y alturas congruentes. En el prisma, dejá sólo la base de apoyo. En la pirámide quitá la base.



$$h = h_1$$

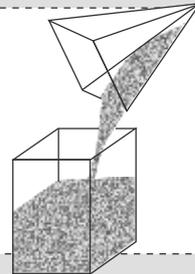
- b) Llená la pirámide con arena seca. Después volcá el contenido en el prisma.

Queda claro que el volumen del prisma es mayor que el de la pirámide.



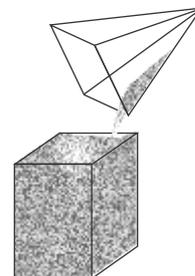
- c) Volvé a llenar la pirámide y repetí el trasvasamiento.

Observá que el volumen del prisma es más de dos veces mayor que el de la pirámide.



- d) Llená nuevamente la pirámide y repetí la operación. Si la actividad se realizó con precisión vas a llegar a esta conclusión :

El volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen de un prisma de base y altura congruente.



Se expresa :

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{\text{Volumen del prisma}}{3}$$

$$\text{Volumen de la pirámide} = \frac{\text{Área de la base} \cdot h}{3}$$

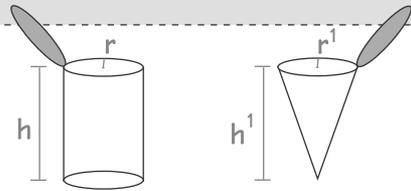
3 - VOLUMEN DEL CONO



**a** Realizá una experiencia semejante a la anterior pero construyendo un **cilindro** y un **cono** con bases y alturas congruentes.

En el **cilindro** dejá sólo la base de apoyo.

En el **cono** retirá la base.



$$h = h^1 \text{ y } r = r^1$$

**b** Llená el **cono** con arena seca y vertí el contenido en el **cilindro**. Comprobá que para llenarlo por completo es decir, para cubrir su volumen, necesitás repetir la operación **3 veces**.



**c** Llegarás a la misma conclusión que con el prisma y la pirámide :

**El volumen del cono es la tercera parte del volumen del cilindro.**

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\text{Volumen del cilindro}}{3}$$

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\text{Área de la base} \cdot h}{3}$$

$$\text{Volumen del cono} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$



**20** Pares para comparar.

Averiguá el volumen de los cuerpos que integran cada par y luego expresá en  $m^3$ , la diferencia entre el volumen de ambos.

**a**

Vol del prisma =

Vol del cilindro =

Diferencia en  $m^3$  =

**b**

Vol del cono =

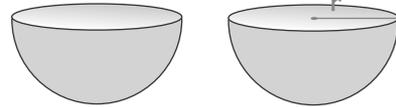
Vol de la pirámide =

Diferencia en  $m^3$  =



## 4 - VOLUMEN DE LA ESFERA

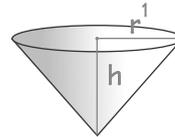
- a) Cortá una pelota de plástico por su **círculo máximo** de manera tal que quede dividida en **dos semiesferas**.



Construí un **cono** teniendo en cuenta que :

$r^1 = r$  (radio con igual longitud que el radio de la semiesfera)

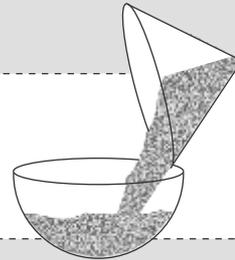
$r^1 = h$  (radio con igual longitud que la altura)



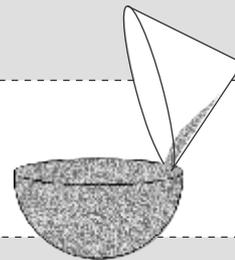
$$r^1 = h \quad r = r^1$$

- b) Quitale la base al cono y llenalo con arena *seca*.

Vertí el contenido en una de las semiesferas.



- c) Llená nuevamente el cono y trasvasalo a la semiesfera.  
Verás que queda totalmente ocupada.



- d) Conclusión :

Volumen de la semiesfera = 2 veces el volumen del cono

Volumen de la esfera = 4 veces el volumen del cono

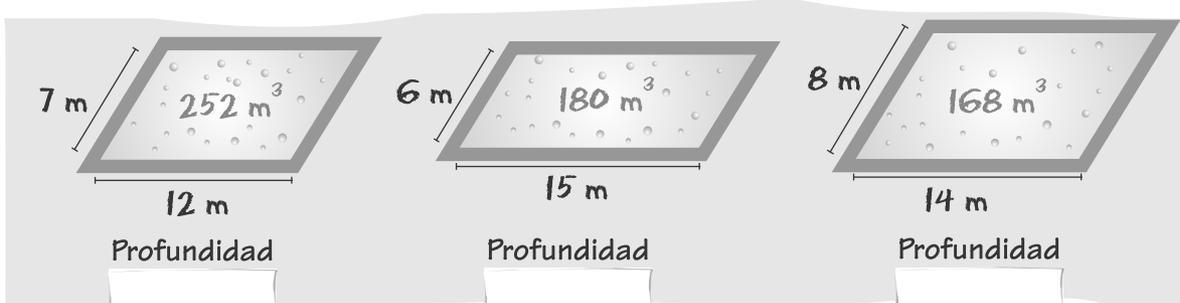
$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

Como la **h** tiene igual medida que el **radio** reemplazamos :

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot r}{3}$$

$$\text{Volumen de la esfera} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

 **21** Determiná la profundidad de cada pileta.



Three rectangular basins are shown, each containing water. The dimensions and volumes are as follows:

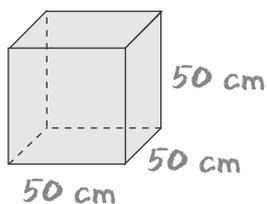
- Basin 1: Length = 12 m, Width = 7 m, Volume =  $252 \text{ m}^3$ . Label: Profundidad
- Basin 2: Length = 15 m, Width = 6 m, Volume =  $180 \text{ m}^3$ . Label: Profundidad
- Basin 3: Length = 14 m, Width = 8 m, Volume =  $168 \text{ m}^3$ . Label: Profundidad

 **22** Visitá las pirámides de Egipto y completá el cuadro.



PIRÁMIDE	ARISTA DE LA BASE	ALTURA	VOLUMEN
KEOPS	233 m	137,18 m	
KEFRÉN	210,46 m	136,4 m	
MICERINÓ	108,4 m	62 m	

 **23** Observá y respondé.

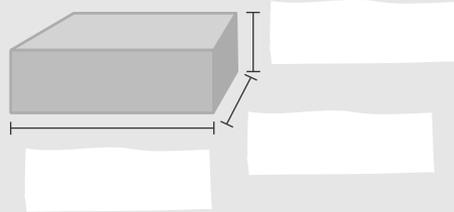


a) ¿ Cuántos cubitos de 1 cm de arista pueden entrar de manera exacta ?

b) ¿ Se necesitará la mitad de los cubitos si la medida de la arista se duplica ?

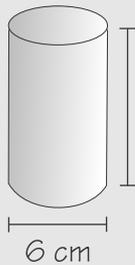
 24 Resolvé.

- a En un envase cilíndrico hay  $3 \text{ dm}^3$  de harina que deben ser colocados en un envase con forma de prisma rectangular. ¿Qué **largo**, **ancho** y **alto** deberá tener ese envase para que lo contenga exactamente?



Analizá si hay una sola opción o hay más de una. Justificá la respuesta.

b



Se quiere trasvasar el contenido de la botella a un envase cilíndrico de **6 cm** de diámetro.

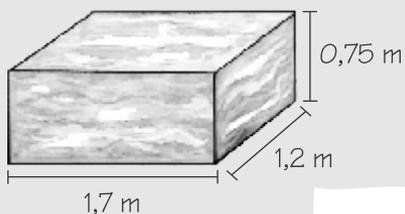
¿Qué altura deberá tener ese envase para que su volumen se aproxime lo más posible al de la botella?

No sólo los cuerpos geométricos tienen volumen. Un **anillo**, una **pedra** o un **resorte** también lo tienen, pues ocupan un lugar en el espacio.

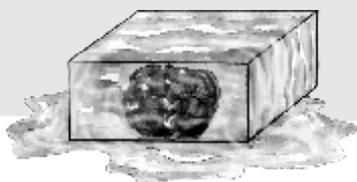
Introducir un cuerpo en un recipiente con agua y calcular la cantidad de líquido que desplaza es una manera de averiguar su volumen sin usar fórmulas.



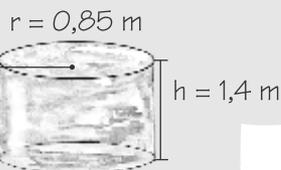
**25** ¿Cuál es el volumen de agua que contiene el piletón?



a) Si se sumerge una piedra que hace desplazar  $680 \text{ dm}^3$  de agua, ¿cuál es, en  $\text{m}^3$ , el volumen de la piedra?



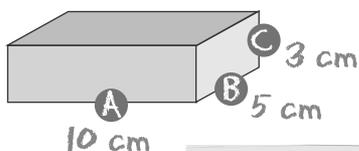
**26** Hallá el volumen de agua que contiene el cilindro.



a) Se sumerge un trozo de metal que desplaza una determinada cantidad de líquido. Si en el cilindro quedan  $2750 \text{ dm}^3$  de agua, ¿cuál es el volumen del metal? Expresalo en  $\text{dm}^3$ .



**27** Calculá el volumen de este prisma rectangular.



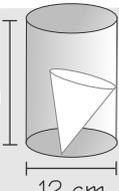
Averiguá cómo varía el volumen si...

- ... se duplica el valor de **A**
- ... se duplica el valor de **B**
- ... se duplica el valor de **C**

**28** Sacá cuentas y respondé.

a) ¿Cuál es el volumen de un globo terráqueo que tiene  $94,2 \text{ cm}$  de circunferencia en su círculo máximo?



b)  Radio del cono =  $4,5 \text{ cm}$   
h del cono =  $10 \text{ cm}$

¿Qué volumen del cilindro no está ocupado por el cono?

Cilindro	Cono	Área libre
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Llevemos esta botella que contiene 1 litro.



Esta lata del mismo jugo también contiene 1 litro, porque  $1 \text{ dm}^3$  equivale a 1 litro.

¿Sabías que existe una relación entre las medidas de **capacidad** y las de **volumen**? Esa relación es constante, se da en los distintos líquidos y podemos expresarla así:

**$1 \text{ l}$  es la capacidad de  $1 \text{ dm}^3$**

Esta relación de equivalencia también la podemos buscar en unidades mayores o menores que el litro.

Observá.

Capacidad	kl	l	ml
Volumen	$\text{m}^3$	$\text{dm}^3$	$\text{cm}^3$
	$1 \text{ kl} = 1 \text{ m}^3$	$1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3$	$1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$

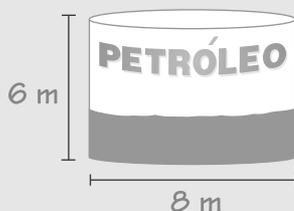
 **29** Tablita en mano y . . . ¡ a buscar equivalencias !

$8 \text{ dm}^3$ <input type="text"/> ml	$75 \text{ m}^3$ <input type="text"/> kl	$1400 \text{ ml}$ <input type="text"/> $\text{dm}^3$
$7,12 \text{ kl}$ <input type="text"/> $\text{dm}^3$	$0,25 \text{ kl}$ <input type="text"/> $\text{cm}^3$	$4 \frac{1}{2} \text{ l}$ <input type="text"/> $\text{dm}^3$

 **30** Entre litros y metros cúbicos.

**a** Se vendieron los  $\frac{2}{3}$  del contenido del tanque.

¿ Cuántos litros quedan ?



**b** El río Paraná, a la altura del complejo hidroeléctrico Yaciretá tiene un caudal medio de  $11\,720 \text{ m}^3$  por segundo.  
¿ Cuántos litros de agua son ?





Ya vimos que  $1 \ell$  de cualquier líquido equivale a  $1 \text{ dm}^3$  de volumen, independientemente de que se trate de agua, aceite o petróleo.

**¿ El peso también se relaciona con estas magnitudes ?**

Sí, pero sólo se establece una equivalencia si consideramos al **agua destilada**. Observá el cuadro.

AGUA DESTILADA		
Volumen	Capacidad	Peso
$1 \text{ m}^3$	$= 1 \text{ kl}$	$= 1 \text{ t}$
$1 \text{ dm}^3$	$= 1 \ell$	$= 1 \text{ kg}$
$1 \text{ cm}^3$	$= 1 \text{ ml}$	$= 1 \text{ g}$

Ejemplo :

$8 \ell$  de agua destilada pesan  $8 \text{ kg}$  y ocupan un volumen de  $8 \text{ dm}^3$ .

Esta comparación sirve sólo para el agua destilada ya que 1 litro de otro líquido, como el aceite, el petróleo o el alcohol por nombrar sólo algunos, tienen diferente peso aunque ocupen  $1 \text{ dm}^3$  de volumen.



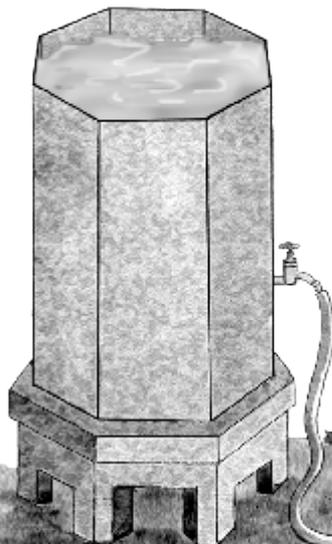
**31** Resolvé.

El peso de una botella vacía es de  $145 \text{ g}$ . Al llenar sus  $3/4$  partes con agua el peso ascendió a  $895 \text{ g}$ .

¿ Cuántos  $\text{ml}$  de agua hay en la botella ?

¿ Cuántos  $\text{cm}^3$  de agua faltan para llenarla ?

**32** Comparando medidas.

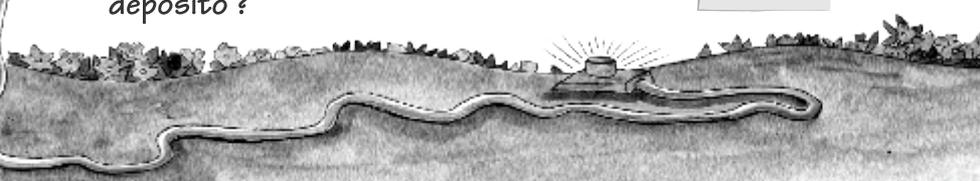


El depósito de agua de una quinta tiene forma de prisma octogonal de  $5 \text{ m}$  de altura y en el que, la arista de la base mide  $0,8 \text{ m}$  y la apotema  $0,97 \text{ m}$ .

¿ Qué volumen de agua contiene el depósito ?

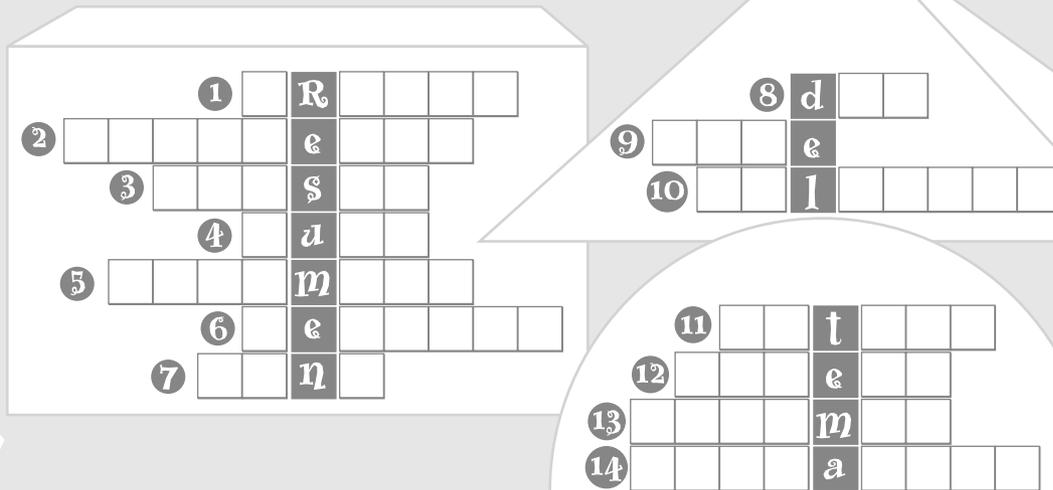
¿ Cuántos litros de agua hay en el depósito cuando se llena ?

¿ Cuántos  $\text{kg}$  pesa el  $50 \%$  del agua del depósito ?





Poné a prueba tus conocimientos  
y . . . ¡ a completar !



- 1 Segmento que une dos caras en un poliedro.
- 2 Poliedro regular de 20 caras.
- 3 Cuerpo que tiene dos bases congruentes y caras rectangulares.
- 4 Poliedro regular en el que sus 6 caras son cuadrados.
- 5 Volumen =  $\frac{Ab \cdot h}{3}$
- 6 Cuerpo que rueda en alguna posición.
- 7 Volumen =  $\frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$
- 8 Cantidad de bases que tiene un prisma.
- 9 Cara de apoyo de los poliedros.
- 10  $AL = \pi \cdot d \cdot h$
- 11 Perpendicular que une la cúspide con la base en la pirámide.
- 12  $AT = 4 \cdot \pi \cdot r^2$
- 13 Cantidad de espacio que ocupa un cuerpo.
- 14 Poliedro regular en el que sus 4 caras son triángulos equiláteros.

# EVALUANDO LO APRENDIDO



1 - ¿Qué medidas se necesitan saber para hallar el área de un dodecaedro ?

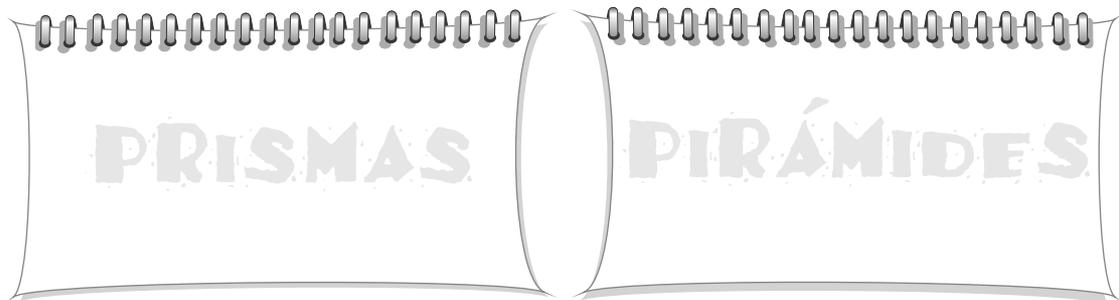
\_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

2 - ¿ En qué poliedros regulares sus caras son triángulos equiláteros ?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3 - Enumerá tres propiedades de los **prismas** y tres de las **pirámides**.

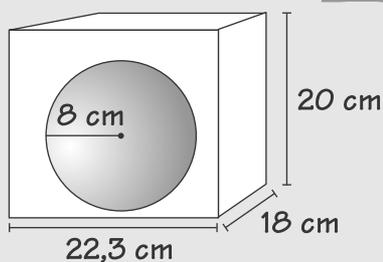


4 - ¿ Verdadero o falso ?

- a) La generatriz es en el cono lo que la apotema es en la pirámide.
- b) En un cilindro la altura siempre debe ser mayor que el diámetro de la base.
- c) 15 kg de agua destilada pesan más de 15 litros.
- d) Si en un cubo se triplica una arista, se triplica también el área lateral.
- e) Si en un cubo se triplica la altura, también se triplica el volumen.

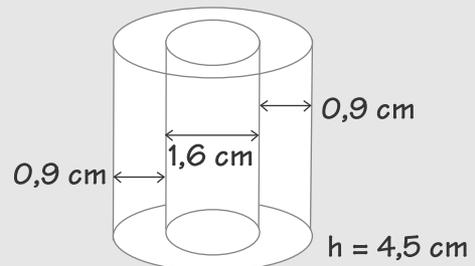
5 - Hallá . . .

. . . el área lateral del prisma \_\_\_\_\_  
 . . . el área total de la esfera \_\_\_\_\_  
 . . . el volumen del prisma **no** ocupado por la esfera. \_\_\_\_\_



6 - ¿Cuál ocupa más espacio . . .

. . . el cilindro menor o el espacio vacío que queda entre ambos cilindros ?



# EN SÍNTESIS

## Cuerpos poliedros irregulares

- Estudiamos los prismas y las pirámides rectas : sus elementos y sus desarrollos.
- Dedujimos las fórmulas para hallar el área lateral y total.

## Volumen

- Vimos que todo cuerpo ocupa un lugar en el espacio.
- Entendimos que para hallar el volumen se tienen en cuenta tres dimensiones.
- Develamos las fórmulas para encontrar el volumen de prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas.

## Cuerpos poliedros regulares

- Reconocimos los 5 poliedros regulares : tetraedo, hexaedro, octaedro, dodecaedo e icosaedo.
- Observamos el desarrollo de cada uno y aprendimos a calcular sus áreas.

## Cuerpos redondos

- Comprendimos que el cilindro, el cono y la esfera surgen a partir de la rotación de una figura plana.
- Encontramos las fórmulas para hallar el área lateral y total del cono y del cilindro y el área total de la esfera.

## Equivalencias

- Analizamos la relación de equivalencia que hay entre unidades de capacidad, volumen y peso.

ISBN 978-987-24838-3-8



9 789872 483838